TSI2 / DM1-2007-2008.

On considère la fonction f définie par la série entière de rayon de convergence $R > 0$: $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$, ainsi que les séries déduites, pour un entier naturel k donné : $f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$.

1) Montrer que f_k a le même rayon de convergence que f.

2) Montrer que $f_{k+1}(x) = x.f_k'(x)$.

3) Exprimer $f_k(x)$ en fonction de f et de ses dérivées pour k variant de 1 à 3.

4) k étant un entier naturel non nul, montrer qu'il existe une suite $(S_{k,p})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout k : $S_{k,0} = 0$, et pour tout $p > k$: $S_{k,p} = 0$; définie par : $f_k(x) = \sum_{p=1}^{k} S_{k,p} x^p.f^{(p)}(x)$, et vérifiant : $S_{k+1,p} = p.S_{k,p} + S_{k,p-1}$ (récurrence). Montrer que cette récurrence reste vraie si on l'étend au rang le plus bas en posant $S_{0,0} = 1$ et $S_{0,p} = 0$ pour tout p non nul.

5) Montrer en utilisant une fonction f judicieusement choisie que : $\sum_{p=1}^{k} S_{k,p} x^p = \sum_{n=0}^{\infty} n^k.\frac{x^n}{n!}.e^{-x}$. Inversement, à l'aide d'une autre fonction judicieusement choisie, calculer : $\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n$.

6) Soit $B_k = \sum_{p=1}^{k} S_{k,p}$ et la série définie par : $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k.\frac{x^k}{k!}$. Montrer que : $g(x) = e^{e^x - 1}$ (en admettant qu'il est possible d'échanger les deux signes Σ intervenant dans le calcul à condition de rester dans le disque de convergence).

7) Soit la suite $(T_{k,p})_{p\in\mathbb{N}}$ définie par : $T_{k,p} = \frac{1}{p!}.\sum_{j=1}^{p} (-1)^{p-j}\binom{p}{j}.j^k$, (où $\binom{p}{j}$ est la combinaison de j éléments parmi p). Montrer que la suite $(T_{k,p})_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie : $T_{k+1,p} = p.T_{k,p} + T_{k,p-1}$; en déduire que $T_{k,p} = S_{k,p}$.

8) En appliquant la formule du binôme et en utilisant le développement en série de l'exponentielle, développer en série entière : $g_p(x) = \frac{1}{p!}.(e^x - 1)^p$ (en admettant qu'il est possible d'échanger les deux signes Σ intervenant dans le calcul à condition de rester dans le disque de convergence). En déduire que : $g_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S_{k,p}.\frac{x^k}{k!}$, puis que : $\sum_{p=0}^{\infty} g_p(x) = g(x)$.

9) Montrer que lorsque k est assez grand alors $S_{k,p} \sim \frac{p^k}{p!}$, en déduire le rayon de convergence de g_p. Donner le rayon de convergence de g.

10) On considère la suite de polynômes définie par $X_0 = 1$ et $X_p = x(x - 1)...(x - p + 1)$. Vérifier que l'on a bien : $X_{p+1} + p.X_p = x.X_p$, et en déduire à l'aide d'une démonstration par récurrence que : $\sum_{p=1}^{k} S_{k,p} X_p = x^k$.

Les $S_{k,p}$ sont appelés : nombres de Stirling de deuxième espèce, et les B_k : nombres de Bell. En outre : $f_k(x) = Li_{-k}(x) + 1$, où Li désigne le polylogarithme.