

TSI2 / DM1-2007-2008 / Corrigé.

1) f_k a le même rayon de convergence que f car la série dérivée k -ième de f a le même rayon de convergence que la série de f : $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$, et qu'elle est équivalente à la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$ car le produit $n(n-1)\dots(n-k+1)$ est équivalent à n^k (quand n grand). (Pas de d'Alembert car certains a_n peuvent être nuls).

$$2) x.f_k'(x) = x.\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n\right)' = x.\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{k+1} a_n x^{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{k+1} a_n x^n = f_{k+1}(x).$$

$$3) f_1(x) = x.f'(x), f_2(x) = x.f'(x) + x^2.f''(x), f_3(x) = x.f'(x) + 3x^2.f''(x) + x^3.f^{(3)}(x).$$

$$4) \text{ Par récurrence sur } k, \text{ la proposition est immédiate pour } k = 1 : f_1(x) = x.f'(x) = \sum_{p=1}^1 S_{k,p} x^p . f^{(p)}(x), \text{ où } S_{1,1} = 1.$$

On suppose ensuite la propriété vraie jusqu'au rang k ; alors $f_{k+1}(x) = x.f_k'(x) = x.\left(\sum_{p=1}^k S_{k,p} x^p . f^{(p)}(x)\right)'$, d'où :

$$f_{k+1}(x) = x.\left(\sum_{p=1}^k p.S_{k,p} x^{p-1} . f^{(p)}(x) + \sum_{p=1}^k S_{k,p} x^p . f^{(p+1)}(x)\right) = \sum_{p=1}^k p.S_{k,p} x^p . f^{(p)}(x) + \sum_{p=1}^k S_{k,p} x^{p+1} . f^{(p+1)}(x) ;$$

$$f_{k+1}(x) = \sum_{p=1}^k p.S_{k,p} x^p . f^{(p)}(x) + \sum_{p=2}^{k+1} S_{k,p-1} x^p . f^{(p)}(x) = \sum_{p=1}^k (p.S_{k,p} + S_{k,p-1}) x^p . f^{(p)}(x).$$

$f_{k+1}(x)$ est donc de la forme souhaitée avec en plus la relation de récurrence : $S_{k+1,p} = p.S_{k,p} + S_{k,p-1}$.

Au rang le plus bas : $S_{1,p} = p.S_{0,p} + S_{0,p-1}$; la seule possibilité non nulle est : $S_{1,1} = S_{0,1} + S_{0,0} = 0 + 1 = 1$. Et alors $f_0(x) = S_{0,0}.f(x) = f(x)$ est OK.

$$5) \text{ En choisissant } f(x) = e^x, \text{ on obtient : } f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{x^n}{n!} \text{ (la définition)} = \sum_{p=1}^k S_{k,p} x^p e^x \text{ (la propriété de la question précédente).}$$

$$\text{ On en déduit le résultat souhaité : } \sum_{p=1}^k S_{k,p} x^p = \sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{x^n}{n!} . e^{-x}.$$

$$\text{ Inversement, en choisissant } f(x) = 1/(1-x) \text{ alors } f^{(p)}(x) = p!/(1-x)^{p+1}, \text{ et alors : } \sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n = \frac{1}{1-x} . \sum_{p=1}^k S_{k,p} p! \left(\frac{x}{1-x}\right)^p.$$

$$6) \text{ On remplace par ce qui précède (pour } x = 1) : g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{1}{n!} . e^{-1} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!}\right) \frac{1}{n!} . e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} \frac{1}{n!} . e^{-1},$$

$$\text{ d'où : } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} . e^{-1} = e^{e^x} . e^{-1} = e^{e^x - 1}.$$

$$7) \text{ On calcule } p.T_{k,p} + T_{k,p-1} = \frac{1}{p!} \sum_{j=1}^p (-1)^{p-j} p . \binom{p}{j} . j^k + \frac{1}{(p-1)!} \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{p-1-j} \binom{p-1}{j} . j^k = \frac{1}{p!} (p^{k+1} + \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{p-j} (p . \binom{p}{j} - \binom{p-1}{j}) . j^k),$$

$$\text{ d'où : } p.T_{k,p} + T_{k,p-1} = \frac{1}{p!} (p^{k+1} + \sum_{j=1}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} . j^{k+1}) = \frac{1}{p!} \sum_{j=1}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} . j^{k+1} = T_{k+1,p}.$$

Comme cette formule permet de faire coïncider la suite $(T_{k,p})$ avec la suite $(S_{k,p})$ à la fois pour la relation de récurrence et à la fois pour les premiers termes : $T_{k,0} = 0$, $T_{k,1} = 1$ et $T_{k,p} = 0$ pour $p > k$, il s'en suit qu'il s'agit de la même suite : $T_{k,p} = S_{k,p}$. (Exemple sans l'initialisation : $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_{n+1} = v_n + 2$, $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$).

$$8) \text{ En appliquant la formule du binôme : } g_p(x) = \frac{1}{p!} . (e^x - 1)^p = \frac{1}{p!} \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} e^{jx} = \frac{1}{p!} \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!}, \text{ d'où :}$$

$$g_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p!} \sum_{j=1}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} . j^k\right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} S_{k,p} \frac{x^k}{k!}.$$

Par suite : $\sum_{p=0}^{\infty} g_p(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \cdot (e^x - 1)^p = e^{e^x - 1} = g(x)$.

9) Lorsque k est assez grand, $S_{k,p} = \frac{1}{p!} \sum_{j=1}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} j^k$ est une somme de p termes, et on est tenté de dire que :

$1 \ll 2^k \ll \dots \ll (p-1)^k \ll p^k$, alors $S_{k,p} \sim \frac{p^k}{p!}$, mais ça n'est malheureusement pas un polynôme car $p!$ dépend de p .

$S_{k,p} = \sum_{j=1}^p (-1)^{p-j} \frac{j^k}{j!(p-j)!} = S_{k,p} = \sum_{j=1}^p (-1)^{p-j} u_j$ avec $u_j = \frac{j^k}{j!(p-j)!}$. Alors $\frac{u_{j+1}}{u_j} = \frac{j}{p-j+1} \cdot \left(\frac{j+1}{j}\right)^k$; d'où, comme $1/p \leq \frac{j}{p-j+1} \leq p$:

$\frac{u_{j+1}}{u_j} \leq \left(\frac{j+1}{j}\right)^k \cdot p$, et alors $u_{j+1} \leq \left(\frac{j+1}{j}\right)^k \cdot p u_j \ll u_j$ pour k suffisamment grand. Ce qui prouve l'équivalence ci-dessus.

Il s'en suit que le rayon de convergence de g_p est le même que celui de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k x^k}{p! k!} = \frac{1}{p!} e^{px}$, le rayon de convergence est donc infini.

Ensuite : $g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (e^x - 1)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^p}{p!} = h(y)$ avec $y = e^x - 1$; comme le RCV($h(y)$) en y est infini, et celui en x de $y(x)$ aussi, il s'en suit que le RCV($g(x)$) en x l'est aussi.

10) Il est évident que $X_{p+1} = (x-p)X_p$, d'où le résultat.

Pour $k=1$ on a bien : $S_{1,1}X_1 = x$. On suppose donc que la propriété est vraie jusqu'au rang k ; au rang $k+1$, on a : $\sum_{p=1}^{k+1} S_{k+1,p}X_p = \sum_{p=1}^{k+1} (S_{k,p-1} + p \cdot S_{k,p})X_p = \sum_{p=1}^{k+1} S_{k,p-1}X_p + \sum_{p=1}^{k+1} p \cdot S_{k,p}X_p = \sum_{p=1}^k S_{k,p}X_{p+1} + \sum_{p=1}^k p \cdot S_{k,p}X_p$ car les termes extrêmes omis sont nuls. Alors : $\sum_{p=1}^{k+1} S_{k+1,p}X_p = \sum_{p=1}^{k+1} S_{k,p}(X_{p+1} + pX_p) = \sum_{p=1}^k S_{k,p} \cdot x \cdot X_p = x \cdot \sum_{p=1}^k S_{k,p}X_p = x \cdot x^k = x^{k+1}$. Ce qui prouve la proposition initiale.