TSI2 / DM2-2007-2008.

On assimile les polynômes et les fonctions polynômes. Soit E l'espace vectoriel des fonctions développables en série entière.

À une fonction f définie par la série entière de rayon de convergence $R > 0$: $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$, et un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe la série entière définie par : $f_{(P)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) a_n x^n$. On note $E_f = \{f_{(P)},\ P \in \mathbb{R}[X]\}$.

1) Montrer que $f_{(P)}$ a le même rayon de convergence que f.

2) Montrer que pour tout réel α et tout couple de polynômes (P, Q) : $f_{(\alpha P)} = \alpha.f_{(P)}$ et $f_{(P+Q)} = f_{(P)} + f_{(Q)}$. En déduire que E_f est un sous-espace vectoriel de E.

3) *a*) Si une infinité de a_n ne sont pas nuls, montrer que la famille $(f_{(P_1)}, f_{(P_2)}, ..., f_{(P_k)})$ est libre dans E si et seulement si la famille $(P_1, P_2, ..., P_k)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Donner alors une base B de E_f.

c) Soit P un polynôme ne s'annulant pas sur $\mathbb{N}$. Montrer que la famille $(f_{1(P)}, f_{2(P)}, ..., f_{k(P)})$ est libre dans E si et seulement si la famille $(f_1, f_2, ..., f_k)$ est libre dans E.

d) $(P_1, P_2, ..., P_k)$ étant une famille libre de polynômes ne s'annulant pas sur $\mathbb{N}$, $(f_1, f_2, ..., f_k)$ étant une famille libre de E, la famille $(f_{1(P_1)}, f_{2(P_2)}, ..., f_{k(P_k)})$ est-elle libre dans E ?

e) Existe-t-il un polynôme non nul P et deux fonctions linéairement indépendantes f et g tels que $f_{(P)}$ et $g_{(P)}$ soient colinéaires ?

4) *a*) Soit $u(x) = e^x$ et $v(x) = e^{-x}$, déterminer : $E_u \cap E_v$.

b) Soit $\phi(x) = \text{ch}(x)$ et $\psi(x) = \text{sh}(x)$, montrer que : $E_\phi + E_\psi = E_u + E_v$.

5) Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note T_P l'application qui à tout élément f de E associe $T_P(f) = f_{(P)}$.

a) Montrer que T_P est un endomorphisme de E.

b) On suppose que parmi les racines de P certaines sont des entiers naturels notés : $n_1, n_2, ..., n_k$; donner $\text{Ker}(T_P)$ et $\text{Im}(T_P)$.

c) On note X_k le polynôme : $X_k(n) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ si $n > 0$, et $X_0 = 1$; montrer alors que l'on a : $T_{X_k}(f)(x) = x^k.f^{(k)}(x)$, puis que $\text{Ker}(T_{X_k}) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

d) Soit $E_{f,k} = \{f_{(X_k.P)},\ P \in \mathbb{R}[X]\}$; est-ce un sous-espace vectoriel de E ? De E_f ?

e) Étant donnés deux entiers naturels h et k tels que $h < k$, déterminer $E_{f,h} + E_{f,k}$, puis $E_{f,h} \cap E_{f,k}$. À quel ensemble appartient $(f_{(X_h)})_{(X_k)}$?

6) *a*) Vérifier que $u_{(X^2)}(x) = (x^2 + x)e^x$. Plus généralement, montrer que $f_{(X^2)}(x) = x^2.f''(x) + x.f'(x)$.

b) En déduire $\text{Ker}(T_{X^2})$ (sachant qu'on est dans E).

c) Soit S l'application définie sur E_u par : $S(u_{(P)}) = P(x).u$; montrer que $S(u_{(P)})$ est un élément de E_u (indication : $(X_0, X_1, ..., X_k, ...)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$), puis que c'est un endomorphisme sur E_u. Est-ce un isomorphisme (toujours sur E_u) ?

7) Étant donné un réel a fixé, $a > -1$, soit l'application $F : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(f, g) = \int_{-1}^{a} f(x)g(x)dx$. Montrer que l'on a : $F(f, g) = F(g, f)$, que pour tout réel α : $F(\alpha.f, g) = F(f, \alpha.g) = \alpha.F(f, g)$, et que quelles que soient f_1, f_2, g_1, g_2 : $F(f_1 + f_2, g) = F(f_1, g) + F(f_2, g)$, puis : $F(f, g_1 + g_2) = F(f, g_1) + F(f, g_2)$. A-t-on : $F(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$?

8) *a*) Soit $f(x) = 1/(1 - x)$; montrer que $f_{(X)}(x) = x/(1 - x)^2$ et $f_{(X^2)}(x) = x(1 + x)/(1 - x)^3$.

b) Déterminer a si c'est possible tel que $F(f, f_{(X)}) = 0$.

c) On pose désormais $a = 1/3$; déterminer les réels λ et μ s'ils existent tels qu'en posant $g = \lambda.f + \mu.f_{(X)} + f_{(X^2)}$:

$$F(f, g) = F(f_{(X)}, g) = 0.$$

d) Montrer que la famille $(f, f_{(X)}, g)$ est libre.

e) Déterminer s'ils existent les réels α, β, γ tels que $\alpha.f + \beta.f_{(X)} + \gamma.g = x^2/(1 - x)^3$.

9) *a*) Déterminer a si c'est possible tel que $F(u, v_{(X)}) = 0$.

b) On pose désormais $a = 1$; calculer $F(u_{(X)}, v)$.

c) Déterminer s'ils existent les couples (f, g) avec $f \in \mathrm{Vect}(u, u_{(X)})$ et $g \in \mathrm{Vect}(v, v_{(X)})$, tels que $F(f, g) = 0$.