

TSI2 / DM2-2007-2008 / Corrigé.

1) On montre d'abord que $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$ a le même rayon de convergence que f car la série dérivée k -ième de f a le même rayon de convergence que la série de $f : f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$, et qu'elle est équivalente à la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$ car le produit $n(n-1)\dots(n-k+1)$ est équivalent à n^k (quand n grand). Il suffit ensuite de faire une combinaison linéaire de séries ayant le même rayon de convergence pour retrouver f_P .

2) On vérifie facilement que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $f_{(\alpha P)} = \alpha \cdot f_{(P)}$ et $f_{(P+Q)} = f_{(P)} + f_{(Q)}$. Comme en outre E_f n'est pas vide (il contient f), c'est donc un sous-espace vectoriel de E .

3) a) Ça vient du fait que : $f_{(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k)} = \alpha_1 \cdot f_{(P_1)} + \alpha_2 \cdot f_{(P_2)} + \dots + \alpha_k \cdot f_{(P_k)}$. Donc :

$\alpha_1 \cdot f_{(P_1)} + \alpha_2 \cdot f_{(P_2)} + \dots + \alpha_k \cdot f_{(P_k)} = 0_E \Leftrightarrow f_{(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k)} = 0_E \Leftrightarrow$ les coefficients de la série sont tous nuls, c'est-à-dire : $(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k)(n) \cdot a_n = 0$ pour tout entier naturel n . Comme il existe une infinité de coefficients a_n non nuls, cette dernière égalité est équivalente à : $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k = 0$ (le polynôme nul) car pour chacun de ces a_n , le polynôme $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k$ admet n pour racine ; ayant une infinité de racines, il est nul. La propriété à démontrer en découle.

b) Par exemple : $B = (f_{(1)}, f_{(x)}, \dots, f_{(x^k)}, \dots)$ est de façon évidente une base de E_f ; elle est libre d'après ce qui précède, et elle est génératrice en utilisant les propriétés de linéarité établies à la question précédente.

c) $\alpha_1 \cdot f_{(P_1)} + \alpha_2 \cdot f_{(P_2)} + \dots + \alpha_k \cdot f_{(P_k)} = 0_E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \cdot (\alpha_1 \cdot a_{1,n} + \alpha_2 \cdot a_{2,n} + \dots + \alpha_k \cdot a_{k,n}) = 0$. Ce qui, compte tenu de l'hypothèse sur P , est bien équivalent à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \cdot a_{1,n} + \alpha_2 \cdot a_{2,n} + \dots + \alpha_k \cdot a_{k,n} = 0$. Enfin :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \cdot a_{1,n} + \alpha_2 \cdot a_{2,n} + \dots + \alpha_k \cdot a_{k,n} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \dots + \alpha_k \cdot f_k = 0_E$. Le résultat en découle.

d) Non ; contre-exemple : $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = x \cdot e^x$, $P_1(n) = n$, $P_2(n) = 1$. Alors : $f_{(P_1)} = f_{(P_2)}$.

e) Soit $P(n) = n(n-1)$, $f(x) = 2+x$ et $g(x) = 1+2x$. Alors : $f_{(P)} = g_{(P)} = 0_E$.

4) a) Pour $u(x) = e^x$ et $v(x) = e^{-x}$, P et Q étant deux polynômes quelconques de $\mathbb{R}[X]$, on peut ainsi écrire : $u_{(P)} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \frac{x^n}{n!}$ et $v_{(Q)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Q(n) \frac{x^n}{n!}$. Un élément de $E_u \cap E_v$ doit pouvoir se mettre sous ces deux formes et devra donc satisfaire à l'équation $u_{(P)} = v_{(Q)}$. C'est une égalité de séries entières, elle doit donc être vérifiée par chacun des coefficients : $P(n) = (-1)^n Q(n)$ pour tout entier naturel n . Ça signifie que les polynômes P et Q doivent coïncider pour une infinité de valeurs, les entiers pairs, tandis que P et $(-Q)$ doivent coïncider pour tous les entiers impairs. Par suite $P = Q$ et $P = -Q$ donc $P = Q = 0$. Alors $u_{(0)} = v_{(0)} = 0_E$ (la fonction nulle) et finalement : $E_u \cap E_v = \{0_E\}$.

b) Pour $\phi(x) = \text{ch}(x)$ et $\psi(x) = \text{sh}(x)$, on a : $u_{(P)} = (\phi + \psi)_{(P)}$ et $v_{(P)} = (\phi - \psi)_{(P)}$ donc $E_u + E_v \subset E_\phi + E_\psi$, et on a de même : $\phi_{(P)} = ((u+v)/2)_{(P)}$ et $\psi_{(P)} = ((u-v)/2)_{(P)}$ donc $E_\phi + E_\psi \subset E_u + E_v$. Par suite : $E_\phi + E_\psi = E_u + E_v$.

5) a) $T_P(\alpha \cdot f) = f_{(\alpha P)} = \alpha \cdot f_{(P)}$; $T_P(f + g)(x) = (f + g)_{(P)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} P(n)b_n x^n$, d'où le résultat : $T_P(f + g) = T_P(f) + T_P(g)$. C'est donc bien une application linéaire.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)a_n = 0$. Donc chaque valeur de n qui n'annule pas $P(n)$ doit annuler a_n , tandis que si n est une racine de $P(n)$ alors a_n est quelconque. Il s'en suit que :

$$\text{Ker}(T_P) = \{b_1 x^{n_1} + b_2 x^{n_2} + \dots + b_k x^{n_k}, (b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k\} = \text{Vect}((x \mapsto x^{n_1}), (x \mapsto x^{n_2}), \dots, (x \mapsto x^{n_k})).$$

Comme l'image de f est nulle sur ces rangs là : $\text{Im}(T_P) = \{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \text{avec } b_{n_1} = b_{n_2} = \dots = b_{n_k} = 0\}$.

$$c) T_{X_k}(f)(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot a_n x^{n-k} = x^k \cdot f^{(k)}(x).$$

$T_{X_k}(f)(x) = 0 \Leftrightarrow x^k \cdot f^{(k)}(x) = 0$ pour tout x , donc : f est un polynôme de degré strictement inférieur à k :

$$\text{Ker}(T_{X_k}) = \mathbb{R}_{k-1}[X].$$

d) Soit un réel α et deux éléments quelconques p et q de $E_{f,k}$: $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot P(n)a_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot Q(n)a_n x^n$. Alors : $\alpha \cdot p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (\alpha \cdot P)(n)a_n x^n$, et de même : $(p + q)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (P + Q)(n)a_n x^n$. Comme $E_{f,k}$ n'est pas vide (contient au moins f), c'est bien un sous-espace vectoriel de E_f ou de E c'est la même chose car $E_{f,k} \subset E_f \subset E$.

e) Il est simple de montrer que $E_{f,k} \subset E_{f,h}$, car $n(n-1)\dots(n-h+1)$ est en facteur dans $f_{(X_h)}$, d'où :

$$E_{f,h} + E_{f,k} = E_{f,h} \text{ et } E_{f,h} \cap E_{f,k} = E_{f,k}.$$

En outre $n(n-1)\dots(n-k+1)$ est en facteur dans $(f_{(X_h)})_{(X_k)} = f_{(X_h \cdot X_k)}$ d'où $(f_{(X_h)})_{(X_k)} \in E_{f,k}$.

6) a) $u_{(X^2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{x^n}{n!} = \dots$ On fait ici la même démonstration que dans le cas général :

$$f_{(X^2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n) \cdot a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^n = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = x^2 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x).$$

Appliqué à u : $u_{(X^2)}(x) = (x^2 + x)e^x$.

b) $f \in \text{Ker}(T_{X^2}) \Leftrightarrow f_{(X^2)}(x) = 0$ pour tout $x \Leftrightarrow x^2 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x \cdot f'(x))' = 0 \Leftrightarrow x \cdot f'(x) = \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = \lambda/x \Leftrightarrow f(x) = \lambda \cdot \ln|x| + \mu$ (λ nul ou x non nul !). Mais cette fonction n'est développable en série entière que si $\lambda = 0$. Par suite : $\text{Ker}(T_{X^2}) = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$ (les fonctions constantes).

c) Comme $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ alors $P(X) = \sum_{p=0}^k \alpha_p \cdot X_p$ d'où :

$$S(u_{(P)})(x) = \sum_{p=0}^k \alpha_p \cdot u_{(X_p)}(x) = \sum_{p=0}^k \alpha_p \cdot x^k \cdot u^{(k)}(x) = \left(\sum_{p=0}^k \alpha_p \cdot x^k\right) \cdot e^x = Q(x) \cdot e^x \in E_u.$$

$S(\alpha \cdot u_{(P)}) = S(u_{(\alpha P)}) = \alpha \cdot Pu = \alpha \cdot S(u_{(P)})$; $S(u_{(P)} + u_{(Q)}) = S(u_{(P+Q)}) = (P + Q)u = Pu + Qu = S(u_{(P)}) + S(u_{(Q)})$. C'est donc bien un endomorphisme.

Comme $u(x) = e^x$, $u(x) > 0$ pour tout x donc $S(u_{(P)}) = 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot e^x = 0$ pour tout $x \Leftrightarrow P(x) = 0$ pour tout $x \Leftrightarrow P$ est le polynôme nul, d'où $u_{(P)} = u_{(0)} = 0$. L'application S est donc injective.

Étant donné un élément quelconque g de E_u , alors $g(x) = Q(x).e^x$; existe-t-il f telle que $f(x) = P(x).e^x$, avec : $g = S(f)$. Comme on l'a vu au début de la question, $Q(x) = \sum_{p=0}^k \alpha_p \cdot x^k \Rightarrow P(x) = \sum_{p=0}^k \alpha_p \cdot X_p$. L'application étant aussi surjective, c'est bien un isomorphisme.

7) La bilinéarité et la symétrie de F sont des conséquences de la linéarité de l'intégrale et de la commutativité de la multiplication. Quant à la dernière propriété, elle vient du fait que l'intégrale d'une fonction positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle : $F(f, f) = \int_{-1}^a f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f$ est nulle sur $[-1, a]$, mais pas sur \mathbb{R} .

8) a) On a vu que $f_{(x)}(x) = x.f'(x)$ et $f_{(x^2)}(x) = x^2.f''(x) + x.f'(x)$. Il s'en suit qu'ici :

$$f_{(x)}(x) = x/(1-x)^2 \text{ et } f_{(x^2)}(x) = x(1+x)/(1-x)^3.$$

b) Le calcul direct (en posant $x = (x-1) + 1$) donne : $F(f, f_{(x)}) = (a+1)(3a-1)/8(a-1)^2$. Donc, comme $a > -1$, on en déduit : $F(f, f_{(x)}) = 0 \Rightarrow a = 1/3$.

c) Le calcul direct donne : $F(f, g) = \lambda + 1/6$ et $F(f_{(x)}, g) = (\mu + 1)/12$. Il s'en suit que : $g = \frac{-f}{6} - f_{(x)} + f_{(x^2)}$.

Enfinement : $g(x) = \frac{11x^2 + 2x - 1}{6(1-x)^3}$.

d) Soit une combinaison linéaire : $h = \alpha.f + \beta.f_{(x)} + \gamma.g$; alors $h = 0 \Rightarrow F(f, h) = F(f_{(x)}, h) = F(g, h) = 0$, d'où : $\alpha.F(f, f) = \beta.F(f_{(x)}, f_{(x)}) = \gamma.F(g, g) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \beta = \gamma = 0$ car les autres termes des produits sont des intégrales de fonctions strictement positives. Il s'en suit que la famille $(f, f_{(x)}, g)$ est bien libre.

e) On cherche cette fois-ci α, β et γ tels que $h = x^2/(1-x)^3$. Le calcul direct de h donne :

$$h = ((6\alpha - 6\beta + 11\gamma)x^2 - (12\alpha - 6\beta - 2\gamma)x + 6\alpha - \gamma)/6(1-x)^3 = x^2/(1-x)^3. \text{ Alors : } \alpha = 1/12, \beta = 0, \gamma = 1/2.$$

9) a) Le calcul direct donne : $F(u, v_{(x)}) = (1-a^2)/12$, d'où $a = 1$ (car $a > -1$).

b) On trouve alors $F(u_{(x)}, v) = 0$.

c) Soit $f = \alpha_1.u + \beta_1.u_{(x)}$, et $g = \alpha_2.v + \beta_2.v_{(x)}$. Alors $F(f, g) = \alpha_1\alpha_2.F(u, v) + \beta_1\beta_2.F(u_{(x)}, v_{(x)})$ car les deux autres termes sont nuls. Par calcul direct on obtient finalement : $F(f, g) = 2(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2/3) = 0$.

Par exemple, si f est nulle, g est quelconque ; et si f n'est pas nulle on peut par exemple poser :

$$f = \alpha.u + \beta.u_{(x)} \text{ et } g = \lambda.(\beta.v + 3\alpha.v_{(x)}), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$