TSI2 / DM3-2007-2008.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.\cos(n\pi x), \text{ avec : } \{a_n = \frac{1}{2^k} \text{ si } n = 13^k \ (k \in \mathbb{N}),\ a_n = 0 \text{ sinon}\}.$$

1) Montrer que $f(x)$ converge absolument pour tout x.

2) Donner la période, la parité et les bornes de f. Montrer que : $f(x) = \cos(\pi x) + \frac{1}{2}.f(13x)$.

3) f est-elle continue ?

4) a) Montrer que pour tout réel y : $0 \le \min(y - E(y), E(y) + 1 - y) \le \frac{1}{2}$.

b) En déduire qu'il existe un entier N et un réel t, avec $-\frac{1}{2} < t \le \frac{1}{2}$ et $y = N + t$.

c) Étant donnés un réel x et un entier naturel p, montrer qu'il existe un entier N_p et un réel t_p, avec $-\frac{1}{2} < t_p \le \frac{1}{2}$, tels que : $13^{p+1}x = N_p + t_p$.

5) Avec ces notations, soit $h_p = \frac{1 - t_p}{13^{p+1}}$ et $h'_p = \frac{1 + t_p}{13^{p+1}}$. Calculer $13^{p+1}(x + h_p)$ et $13^{p+1}(x - h'_p)$.

6) x et p étant donnés, on note $S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi x)$. Soit h un réel non nul.

a) Montrer que : $|S_p(x + h) - S_p(x)| < \frac{2\pi}{11}.(13/2)^{p+1}|h|$. (Utiliser $|\sin(x)| \le |x|$).

b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \left]-\frac{2\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}\right[$ tel que : $(S_p(x + h) - S_p(x))/h = \alpha.(13/2)^{p+1}$.

7) x et p étant donnés, on note $R_p(x) = f(x) - S_p(x)$.

a) Montrer que : $R_p(x + h_p) = R_p(x - h'_p) = \frac{(-1)^{N_p+1}}{2^p}$, et : $R_p(x) = \frac{(-1)^{N_p}}{2^{p+1}}.f(t_p)$.

b) En déduire que : $|R_p(x - h'_p) - R_p(x)| = |R_p(x + h_p) - R_p(x)| \ge \frac{1}{2^{p+1}}$.

c) En déduire qu'il existe β et $\beta' \in [-2, -\frac{2}{3}]\cup[\frac{2}{3}, 2]$ tels que :
$(R_p(x + h_p) - R_p(x))/h_p = \beta.(13/2)^{p+1}$, et $(R_p(x - h'_p) - R_p(x)/h'_p = \beta'.(13/2)^{p+1}$.

8) En déduire que : $\lim_{p\to\infty} |(f(x + h_p) - f(x))/h_p| = \lim_{p\to\infty} |(f(x - h'_p) - f(x))/h'_p| = +\infty$.

9) En déduire que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.