TSI2 / DM3-2007-2008 / Corrigé.

On considère : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.\cos(n\pi x)$, avec : $\{a_n = \frac{1}{2^k}$ si $n = 13^k$ $(k \in \mathbb{N})$, $a_n = 0$ sinon$\}$.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n.\cos(n\pi x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$. La série est donc absolument convergente (donc convergente), il faut toutefois préciser qu'on additionne des termes positifs.

2) $f(x + 2) = f(x)$, la période est 2, encore faut-il que ce soit la plus petite ; $a_1 \neq 0$, il y a donc un terme en $\cos(\pi x)$ dans la somme, il ne peut alors pas y avoir une période plus petite.

$f(-x) = f(x)$, donc f est paire. (On peut aussi utiliser le fait que c'est une série de Fourier pour laquelle $b_n = 0$).

D'après la question précédente : $f(x) \in [-2, 2]$ et, comme $f(0) = 2$ et $f(1) = -2$, les bornes de f sont -2 et 2.

$\forall x$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi x) = \cos(\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi x) = \cos(\pi x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}.\cos(13^{k+1}\pi x)$; il s'en suit que :

$f(x) = \cos(\pi x) + \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi(13x)) = \cos(\pi x) + \frac{1}{2}.f(13x)$.

3) Il suffit de montrer la continuité sur $[0, 1]$ car f est de période 2 et paire. Grâce à la convergence absolue de la série : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k.\cos(k\pi x)| < \varepsilon$. Par ailleurs : $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.\cos(k\pi x)$ est continue car c'est une somme finie de fonctions continues. Enfin, quand x tend vers x_0 alors $s_n(x)$ tend vers $s_n(x_0)$ car s_n est continue, et comme $|r_n(x) - r_n(x_0)| \leq r_n(x) + r_n(x_0) < 2\varepsilon$, et $f(x) = s_n(x) + r_n(x)$, alors la continuité en tout x_0 est assurée. Il ne reste plus qu'à rédiger la proposition convenablement :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|r_N(x) - r_N(x_0)| < \varepsilon/2$ et $\exists \eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \Rightarrow |s_N(x) - s_N(x_0)| < \varepsilon/2$; par suite, $|f(x) - f(x_0)| \leq |s_N(x) - s_N(x_0)| + |r_N(x) - r_N(x_0)| < \varepsilon$.

- *Attention* : la fonction f_n qui, pour tout n non nul associe à x : $f_n(x) = x/n$ est continue en 0, mais la somme infinie des $f_n(x)$ est impossible à réaliser pour x non nul.

4) a) $\forall y$, $E(y) \leq y < E(y) + 1$; donc : $E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2}$ ou $E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1$. D'où finalement :

$0 \leq y - E(y) < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leq y - E(y) < 1$, c'est-à-dire : $0 \leq y - E(y) < \frac{1}{2}$ ou $0 \leq 1 - y + E(y) < \frac{1}{2}$. Il s'en suit bien que :

$0 \leq \min(y - E(y), E(y) + 1 - y) \leq \frac{1}{2}$.

b) Dans le premier cas $N = E(y)$ et $t = y - E(y)$, et dans le second cas $N = E(y) + 1$ et $t = y - E(y) - 1$.

c) Il suffit de poser $y = 13^{p+1}x$ dans ce qui précède et on obtient immédiatement N_p et t_p.

5) Soit $h_p = \frac{1 - t_p}{13^{p+1}}$ et $h'_p = \frac{1 + t_p}{13^{p+1}}$; $13^{p+1}(x + h_p) = N_p + 1$ et $13^{p+1}(x - h'_p) = N_p - 1$.

6) Soit $S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi x)$.

a) $\forall$ h, $S_p(x + h) - S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}.(\cos(13^k\pi(x+ h)) - \cos(13^k\pi x)) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}.2.\sin(13^k\pi(x+ h/2)).\sin(13^k\pi h/2)$,

d'où : $|S_p(x + h) - S_p(x)| \le \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}.2.|\sin(13^k\pi h/2)| \le \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}.13^k\pi|h| = \pi|h|.\sum_{k=0}^{p}(13/2)^k = \pi|h|((13/2)^{p+1} - 1)/(13/2 - 1)$. Et :

$|S_p(x + h) - S_p(x)| < \pi|h|(13/2)^{p+1}/(11/2) = \frac{2\pi}{11}.(13/2)^{p+1}|h|$.

b) On en déduit immédiatement : $(S_p(x + h) - S_p(x))/h = \alpha.(13/2)^{p+1}$ avec $\alpha \in \left]-\frac{2\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}\right[$.

7) Soit $R_p(x) = f(x) - S_p(x)$.

a) $R_p(x + h_p) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi(x + h_p)) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi(N_p + 1)/13^{p+1}) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.(-1)^{N_p+1}$. De même :

$R_p(x - h'_p) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi(x - h'_p)) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi(N_p - 1)/13^{p+1}) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.(-1)^{N_p-1}$. D'où :

$R_p(x + h_p) = R_p(x - h'_p) = (-1)^{N_p+1}\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = (2 - (1 - \frac{1}{2^{p+1}})/(\frac{1}{2})).(-1)^{N_p+1} = \frac{(-1)^{N_p+1}}{2^p}$.

Comme : $13^k\pi x = 13^k\pi(N_p + t_p)/13^{p+1}$, alors :

$\cos(13^k\pi x) = \cos(13^{k-p-1}\pi N_p)\cos(13^{k-p-1}\pi t_p) - \sin(13^{k-p-1}\pi N_p)\sin(13^{k-p-1}\pi t_p) = (-1)^{N_p}.\cos(13^{k-p-1}\pi t_p)$. Par suite :

$R_p(x) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi x) = (-1)^{N_p}.\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^{k-p-1}\pi t_p) = \frac{(-1)^{N_p}}{2^{p+1}}.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}.\cos(13^k\pi t_p) = \frac{(-1)^{N_p}}{2^{p+1}}.f(t_p)$.

b) $R_p(x - h'_p) - R_p(x) = R_p(x + h_p) - R_p(x) = \frac{(-1)^{N_p+1}}{2^p}.(1 + \frac{1}{2}.f(t_p)) = \frac{(-1)^{N_p+1}}{2^p}.(1 + \frac{1}{2}.\cos(\pi t_p) + \frac{1}{4}.f(13t_p))$.

Comme $|t_p| \le \frac{1}{2}$, donc $0 \le \cos(\pi t_p) \le 1$, et $|f(13t_p)| \le 2$, alors $\frac{1}{2} \le 1 + \frac{1}{2}.\cos(\pi t_p) + \frac{1}{4}.f(13t_p) \le 2$. Il s'en suit que :

$|R_p(x - h'_p) - R_p(x)| = |R_p(x + h_p) - R_p(x)| \ge \frac{1}{2^p}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{p+1}}$.

c) $|(R_p(x + h_p) - R_p(x))/h_p| \ge \frac{1}{h_p.2^{p+1}} = \frac{1}{1 - t_p}.(13/2)^{p+1}$. Comme $t_p \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors : $\frac{1}{1 - t_p} \in \left]\frac{2}{3}, 2\right]$.

Il s'en suit que : $(R_p(x + h_p) - R_p(x))/h_p = \beta.(13/2)^{p+1}$ avec $\beta \in \left[-2, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, 2\right]$.

$|R_p(x - h'_p) - R_p(x))/h'_p \ge \frac{1}{h'_p.2^{p+1}} = \frac{1}{1 + t_p}.(13/2)^{p+1}$. Comme précédemment, $\frac{1}{1 + t_p} \in \left[\frac{2}{3}, 2\right[$, et il s'en suit que :

$(R_p(x - h'_p) - R_p(x))/h'_p = \beta'.(13/2)^{p+1}$ avec $\beta' \in \left]-2, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 2\right[$.

8) $(f(x + h_p) - f(x))/h_p = (S_p(x + h_p) - S_p(x))/h_p + (R_p(x + h_p) - R_p(x))/h_p$, d'où :

$(f(x + h_p) - f(x))/h_p = (\alpha + \beta).(13/2)^{p+1}$; et comme $|\alpha + \beta| \ge \frac{2}{3} - \frac{2\pi}{11} > \frac{1}{11}$, alors $|(f(x + h_p) - f(x))/h_p| > \frac{1}{11}.(13/2)^{p+1}$,

d'où : $\lim_{p\to\infty}|(f(x + h_p) - f(x))/h_p| = +\infty$.

De même : $(f(x - h'_p) - f(x))/h'_p = (\alpha + \beta').(13/2)^{p+1}$; et l'on obtient : $\lim_{p\to\infty}|(f(x - h'_p) - f(x))/h'_p| = +\infty$.

9) Comme pour tout réel H il est possible d'obtenir $h_p < |H|$ et $h'_p < |H|$, alors l'ensemble E_H défini par :

$E_H = \{(f(x + h) - f(x))/h,\ 0 < h \le |H|\}$ n'est pas borné, donc f n'est pas dérivable à droite en x. De même :

$E'_H = \{(f(x + h) - f(x))/h,\ -|H| \le h < 0\}$ n'est pas borné non plus, donc f n'est pas dérivable à gauche en x.

On a bien montré que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.