TSI2 / DM4-2007-2008.

Concours Centrale-Supélec 2005 - Mathématiques I.

Les polynômes intervenant dans ce problème sont des polynômes à une indéterminée X sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un polynôme pourra être indifféremment noté P ou $P(X)$. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,\ 1]$ sur $\mathbb{R}$, par F_n le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel), et par $[n]$ la partie entière d'un entier n.

I.A) *ch* désignant la fonction cosinus hyperbolique et *sh* la fonction sinus hyperbolique, on rappelle que :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ e^{n\alpha} = (\mathrm{ch}(\alpha) + \mathrm{sh}(\alpha))^n.$$

I.A.1) Montrer que : $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{ch}(n\alpha) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \mathrm{ch}(\alpha)^{n-2k}(\mathrm{ch}^2(\alpha) - 1)^k.$

I.A.2) En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un polynôme P_n tel que :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(n\alpha) = P_n(\mathrm{ch}(\alpha)).$$

Expliciter P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

I.B) I.B.1) Démontrer que pour tout $n \geq 2$: $P_n(X) + P_{n-2}(X) = 2X.P_{n-1}(X)$. En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

I.B.2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$.

I.B.3) Calculer le terme de plus haut degré de P_n. Déterminer la parité de P_n.

I.B.4) Démontrer que, si $|x| > 1$ et $n \geq 1$, alors $|P_n(x)| > 1$.

I.C) Dans cette question n est un entier naturel non nul fixé. Démontrer que les racines de P_n sont toutes réelles, distinctes, et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1,\ 1]$. Elles seront notées x_i, $0 \leq i \leq n - 1$ de telle sorte que la suite des x_i soit strictement décroissante. On déterminera la valeur de x_i.

II.A) II.A.1) Pour f élément de E, justifier la convergence de l'intégrale : $\int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

II.A.2) Montrer que l'application Φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi : (f,\ g) \mapsto (f|g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ définit un produit scalaire sur E. On notera $||.||$ la norme associée à ce produit scalaire.

II.B) Pour un entier naturel n, on pose : $I_n = \int_{-1}^{1} \frac{t^n dt}{\sqrt{1 - t^2}}$. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}, pour $n \geq 2$. En déduire la valeur de I_n.

II.C) II.C.1) Calculer, pour m et n entiers naturels : $\int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)P_n(t)dt}{\sqrt{1 - t^2}}$. Que peut-on en déduire ?

II.C.2) Démontrer que : $\int_{-1}^{1} \frac{t^n P_m(t)dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0$ lorsque m et n sont deux entiers naturels tels que $n < m$.

II.D) Soit h la fonction de E définie par $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Calculer la distance de h au sous-espace F_4, c'est-à-dire le nombre $d(h,\ F_4) = \inf_{P\in F_4} ||h - P||$.