Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I concours Centrale-Supélec 2005

Partie I

I.A.1) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(n\alpha) &= \frac{e^{n\alpha}+e^{-n\alpha}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ \mathrm{ch}(\alpha)^{n-k}\left(\mathrm{sh}(\alpha)^k + (-1)^k \mathrm{sh}(\alpha)^k\right) \\ &= \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}\ \mathrm{ch}(\alpha)^{n-2k}\mathrm{sh}(\alpha)^{2k} \text{ (simplification des termes de rang impair)} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k}\ \mathrm{ch}(\alpha)^{n-2k}\left(\mathrm{ch}(\alpha)^2-1\right)^k \end{aligned}.$$

D'où :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{ch}(n\alpha) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k}\ \mathrm{ch}(\alpha)^{n-2k}\left(\mathrm{ch}(\alpha)^2-1\right)^k}$$

I.A.2) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k}\ X^{n-2k}\left(X^2-1\right)^k$.

Alors, d'après I.A.1), $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{ch}(n\alpha) = P_n(\mathrm{ch}(\alpha))$. Cela prouve l'existence des polynômes P_n cherchés et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k}\ X^{n-2k}\left(X^2-1\right)^k}$$

D'où, par application de la formule précédente :
$\underline{P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = 2X^2-1,\ P_3 = 4X^3-3X,\ P_4 = 8X^4-8X^2+1}$

I.B.1) L'on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}(n\alpha) + \mathrm{ch}((n-2)\alpha) &&= 2\mathrm{ch}((n-1)\alpha)\mathrm{ch}(\alpha) \\ \Leftrightarrow\ &P_n(\mathrm{ch}(\alpha)) + P_{n-2}(\mathrm{ch}(\alpha)) &&= 2P_{n-1}(\mathrm{ch}(\alpha))P_1(\mathrm{ch}(\alpha)) \end{aligned}$$

Comme $\forall y \in [1,+\infty[\,,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ y = \mathrm{ch}(\alpha)$, on en déduit que le polynôme $P_n + P_{n-2} - 2X.P_{n-1}$ s'annule pour tout $y \in [1,+\infty[$. Ayant une infinité de racines, il est nul et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n + P_{n-2} = 2X.P_{n-1}}$$

P_0 et P_1 étant évidemment définis de manière unique, la propriété précédente donnant P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}, une démonstration par récurrence simple justifie
l'unicité de la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.B.2) On montrerait, comme dans la question I.A.1., que :
$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k}\ \cos(\alpha)^{n-2k}\left(\cos(\alpha)^2-1\right)^k$,
les formules de trigonométrie hyperboliques se déduisant des formules de trigonométrie circulaire en substituant ch à cos et $i$sh à sin. D'où :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n\alpha) = P_n(\cos(\alpha))}$$

I.B.3) Une récurrence simple montre que P_n est de degré n, que son coefficient dominant est 1 pour $n = 0$ et 2^{n-1} pour $n \ge 1$ et que P_n est de la parité de n.

I.B.4) Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| > 1$ et $n \geq 1$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*,\ |x| = \text{ch}(\alpha)$

Comme P_n est pair ou impair, $|P_n(x)| = |P_n(|x|)| = |P_n(\text{ch}(\alpha))| = \text{ch}(n\alpha) > 1$ car $n\alpha \neq 0$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| > 1 \Rightarrow |P_n(x)| > 1}$$

I.C - Résolvons l'équation $\cos(n\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} \cos(n\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

D'où $P_n(\cos(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

En particulier, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $P_n\left(\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = 0$.

Or comme la suite $\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)_{k\in\{0,1,\ldots,n-1\}}$ est une suite de réels de $]0, \pi[$ strictement croissante et cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, la suite $\left(\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)_{k\in\{0,1,\ldots,n-1\}}$ est une suite strictement décroissante de n réels de $]-1, 1[$ qui annulent chacun le polynôme P_n de degré n. Ce sont donc les n racines de P_n.

Les racines de P_n sont donc toutes réelles, distinctes et appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$. Selon l'énoncé, on peut poser :

$$\boxed{x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right) \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1}$$

Partie II

II.A.1) Pour $f \in E,\ f$ est bornée. Supposons $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f| \leq M$.

Comme $t \to \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$, $\forall t \in]-1,1[$, $\left|\dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\int_{-1}^{1} \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge (simple), on en déduit que :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ converge.}}$$

II.A.2. Comme l'intégrale est linéaire, Φ est bilinéaire.

Φ est évidemment symétrique.

Soit $f \in E\backslash\{0\}$, alors $(f|f) \geq 0$. Si $(f|f) = 0$, comme $t \to \dfrac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1, 1[$, l'on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1,1[,\ \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \quad &\Leftrightarrow f(t)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(t) = 0 \end{aligned}$$

f étant continue sur $[-1, 1]$, $f = 0$. Il y a contradiction, donc $\Phi(f, f) > 0$ et Φ est définie positive. D'où :

Φ est un produit scalaire sur E.

II.B - $u \to t = \cos(u)$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$. C'est donc un changement de variables valide dans I_n et $I_n = \int_0^{\pi} \cos(u)^n du$. Une intégration par parties montre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ nI_n = (n-1)I_{n-2}}$$

Or $I_0 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = [\arcsin(t)]_{-1}^{1} = \pi$ et $I_1 = 0$ car la fonction intégrée est impaire. D'où :

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2}\\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4}\\ &= \ldots \text{(récurrence simple)}\\ &= \frac{(2p-1)\ldots 3.1}{(2p)\ldots 4.2} I_0\\ &= \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\text{(formule encore vraie pour p=0)}\end{aligned}$$

On a montré :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ et } I_{2p+1} = 0}$$

II.C.1) Le même changement de variables qu'en II.B. montre que, pour $m, n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^\pi \cos(mu)\cos(nu)du$. D'où :

$$\begin{aligned}\text{Si } m \neq n,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos((m+n)u) + \cos((m-n)u)\right) du\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((m+n)u)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)u)}{m-n}\right]_0^\pi\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } m = n \neq 0,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos(2mu) + 1\right) du\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2mu)}{2m} + u\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } m = n = 0,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= \int_0^\pi du\\ &= \pi\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En résumé, } \begin{cases}\text{si } m \neq n,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0\\ \text{si } m = n \neq 0,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{2}\\ \text{si } m = n = 0,\ \int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \pi\end{cases}}$$

On en déduit que $(P_n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire Φ.

II.C.2) $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une suite de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés de F_n. C'en est donc une base. Soient m et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$.

$\exists(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ X^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$ et :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{t^n P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{-1}^{1} \frac{P_k(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\\ &= 0 \text{ d'après la question précédente.}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_{-1}^{1} \frac{t^n P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0}$$

II.D - On a vu que $F_4 = Vect\{P_0, \ldots, P_4\}$ et $(P_0, \ldots, P_4)$ est une base orthogonale de F_4. $\left(\dfrac{P_0}{\|P_0\|}, \ldots, \dfrac{P_4}{\|P_4\|}\right)$ est donc une base orthonormée de F_4.

La distance de h à F_4 vaut $\sqrt{\|h\|^2 - \|\overline{h}\|^2}$ où $\overline{h}$ désigne la projection orthogonale de h sur F_4.

$\overline{h} = \sum\limits_{k=0}^{4} \left(h|\dfrac{P_k}{\|P_k\|}\right) \dfrac{P_k}{\|P_k\|}$.

D'où, $\|\overline{h}\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{4} \left(h|\dfrac{P_k}{\|P_k\|}\right)^2 = \sum\limits_{k=0}^{4} \dfrac{(h|P_k)^2}{\|P_k\|^2}$.

Or $(h|P_k) = \int_{-1}^{1} \dfrac{h(t)P_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{1} P_k(t)dt$. D'où :

$(h|P_0) = \int_{-1}^{1} dt = 2$.

$(h|P_1) = \int_{-1}^{1} tdt = 0$.

$(h|P_2) = 2\int_{0}^{1} (2t^2-1)dt = -\dfrac{2}{3}$.

$(h|P_3) = \int_{-1}^{1} (4t^3-3t)dt = 0$ (polynôme impair).

$(h|P_4) = 2\int_{0}^{1} (8t^4-8t^2+1)dt = -\dfrac{2}{15}$. Donc :

$\|\overline{h}\|^2 = \dfrac{4}{\pi} + \dfrac{8}{9\pi} + \dfrac{8}{225\pi} = \dfrac{1108}{225\pi}$.

Enfin $\|h\|^2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{0}^{\pi} \sin(u)^2 du = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où : $d(h, F_4) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1108}{225\pi}} \Rightarrow \boxed{d(h, F_4) = \dfrac{1}{30}\sqrt{\dfrac{450\pi^2 - 4432}{\pi}}}$

Partie III

III.A.1) $\forall x \in]-1, 1[,\ \dfrac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P'(x)] = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}P'(x) + \sqrt{1-x^2}P''(x)$, ce qui montre que $\forall x \in]-1, 1[,\ \sqrt{1-x^2}\dfrac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P'(x)] = -xP'(x) + (1-x^2)P''(x)$.

Posons $Q = -XP' + (1-X^2)P''$.

Alors $\forall x \in]-1, 1[,\ Q(x) = \sqrt{1-x^2}\dfrac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P'(x)]$. D'où l'existence de Q.

Si 2 polynômes Q_1 et Q_2 vérifient la même propriété, alors $\forall x \in]-1, 1[,\ Q_1(x) = Q_2(x)$; cela montre que $Q_1 - Q_2$ possède une infinité de racines et donc qu'il est nul : $Q_1 = Q_2$. D'où l'unicité de Q.

Donc, pour tout P de F_n, il existe un polynôme Q unique tel que :

$$\underline{\forall x \in]-1, 1[,\ Q(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P'(x)]}$$

La dérivation étant linéaire, φ est évidemment linéaire ; en outre, comme $P \in F_n,\ -XP' + (1-X^2)P'' \in F_n$. D'où :

$$\underline{\varphi \text{ est un endomorphisme de } F_n}$$

III.A.2) $\varphi(1) = 0$