TSI2 / DM5-2007-2008.

CCP 2007 - Mathématiques II - Problème 1 (m07pt2e).

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. Si P appartient à E, on désigne par P' son polynôme dérivé.

Soit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

2) Soit $B_C = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Vérifier que B_C est une base orthogonale de $(E, \langle\rangle)$. Donner une base orthonormée B de $(E, \langle\rangle)$.

3) On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $P = a + bX + cX^2 \in E$, $Q = a' + b'X + c'X^2 \in E$. Vérifier que :

$$\phi(P, Q) = [a \ \ b \ \ c] S \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}.$$

4) Soit u un endomorphisme de E et soit A sa matrice dans la base canonique de E. Montrer l'équivalence des deux propriétés : (*a*) $\forall (P, Q) \in E^2$, $\langle u(P), u(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$; (*b*) ${}^tASA = S$.

5) On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Montrer que le sous-ensemble $G = \{A \in M_3(\mathbb{R}),\ {}^tASA = S\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices carrées.

6) Soit v l'application qui à tout polynôme P de E associe $Q = v(P)$ tel que pour tout x réel, $Q(x) = P(1 - x)$.

a) Démontrer que v est un endomorphisme de E.

b) Calculer la matrice de v dans la base canonique de E.

c) Est-ce que v vérifie la propriété définie dans la question 4) ?

d) Montrer que v est bijectif et préciser v^{-1}.

7) Soit $\psi : E \to E$, $P \mapsto \psi(P) = P + P' + P''$, et $\psi_1 : E \to E$, $P \mapsto \psi_1(P) = P - P'$.

a) Montrer que ψ et ψ_1 sont des endomorphismes de E.

b) Calculer leurs matrices dans la base canonique de E.

c) Déterminer $\psi \circ \psi_1$; conclusion ?

d) En déduire une solution particulière et la solution générale de l'équation différentielle $y - y' = x^2 + 5x + 9$.

8) On considère l'endomorphisme r de E qui a pour matrice dans la base orthonormée B de E :

$A = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 1 \end{pmatrix}$. L'espace est orienté de telle façon que la base orthonormée B soit directe.

a) Montrer que A est une matrice orthogonale.

b) Rechercher les vecteurs invariants par r.

c) En déduire que r est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle en ayant choisi une orientation de l'axe.