

# TSI2 / DS1-2007-2008.

On considère les trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies pour  $n \geq 1$  par :

$$u_{2n} = -1/4n^2, \quad u_{2n+1} = -1/(2n+1)^2 + 1/(n+2)^3;$$

$$v_{2n} = 1/4n^2, \quad v_{2n+1} = 1/(2n+1)^2 + 1/(n+2)^3;$$

$$w_n = v_n - u_n.$$

Attention :  $u_{2n+1}$  et  $v_{2n+1}$  sont donc définies pour  $n = 0$ .

Ainsi que les séries entières :  $L_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ,  $L_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n$ .

(définies sur leurs domaines respectifs de convergences).

I) 1) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $u_n < 0 < v_n$ , et que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers 0.

b) Montrer que  $(w_n)$  est décroissante et converge vers 0.

c) Montrer que pour  $n \geq 3$ ,  $v_{2n} < v_{2n+1}$ . Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont-elles adjacentes ?

2) Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites réelles quelconques telles que :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $a_m \leq b_n$ , et :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ .

a) Soit  $I_n = [a_n, b_n]$  ; montrer que :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $I_m \cap I_n \neq \emptyset$ .

b) En déduire qu'il existe au moins un réel  $\alpha$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in I_n$  ( $\alpha$  ne dépend pas de  $n$ ).

c) Montrer qu'alors  $\alpha$  est unique.

d) Montrer que :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $a_m \leq \alpha \leq b_n$ .

e) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ .

II) Donner la nature des séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$ , et calculer leurs sommes respectives en fonction de

$\zeta_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1,202056903$ . (On considère désormais dans la suite de l'énoncé  $\zeta_3$  comme une constante connue). (Rappel :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ).

III) 1) a) Donner les rayons de convergence des différentes séries entières définies ci-dessus. Montrer que leur intervalle de convergence commun est  $I = [-1, 1]$ .

b) Exprimer  $f(x)$  et  $g(x)$  en fonction de  $L_2(x)$  et  $L_3(x)$ .

c) Exprimer les séries entières :  $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x^n$  et  $k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) x^n$  à l'aide des fonctions  $L_2$  et  $L_3$ .

2) a) Montrer que  $L_2(1) + L_2(-1) = L_2(1)/2$ , en déduire :  $L_2(-1)$ .

b) Calculer par une méthode analogue :  $L_3(-1)$ .

c) En déduire  $f(-1)$  et  $g(-1)$ .

3) a) Montrer que  $L_2(x)$  est une primitive de  $\frac{-\ln(1-x)}{x}$ , et que  $L_3(x)$  est une primitive de  $\frac{L_2(x)}{x}$ .

b) En déduire l'expression par des intégrales de  $L_2(x)$  et  $L_3(x)$ . Donner les intervalles sur lesquels ces formules sont valables. (On n'attend pas la même réponse des 3/2 et des 5/2).

c) En déduire la formule :  $L_2(x) + L_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \cdot \ln(1-x)$ . (Pour les 3/2 : on admet que  $\int_0^1 \frac{\ln(1-t) dt}{t} = -\pi^2/6$ ).

d) Calculer :  $L_2(1/2)$ .

4) Donner la série entière de :  $L_2(x) - \frac{L_2(x^2)}{4}$ . En déduire :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .