

# TSI2 / DS2-2007-2008.

Notations principales :  $E = \mathbb{R}[X]$  ;  $E_2 = \mathbb{R}_2[X]$  l'ensemble des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2.

Pour  $a \in \mathbb{R}$  donné,  $F_a = (X + a).\mathbb{R}[X] = \{(X + a).P, P \in E\}$  ;  $E' = F_1 \cap E_2$ .

$B = (1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$  la base canonique de  $E$  ;  $C_a = (1, (X + a), (X + a)^2, \dots, (X + a)^n, \dots)$  dont on ne sait pas si c'est une base.

$B_2 = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $E_2$ ,  $D = (1, (X + 1), (X + 1)^2)$  dont on ne sait pas si c'est une base.

$f_a: E \rightarrow E, P \mapsto f_a(P)$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X + a)$ , ce qui signifie qu'il existe un unique polynôme  $Q$  de  $E$  tel que :  $P = (X + a).Q + f_a(P)$ , avec en outre le degré :  $d^\circ(f_a(P)) < 1$ .

$g_a$  définie de  $E$  dans un ensemble qui reste à déterminer, telle que :  $g_a(P) = \frac{P - f_a(P)}{X + a}$ .

$\phi_a: E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \phi_a(P, Q) = \int_0^1 (g_a(P)g_a(Q))(x)dx$ .

- *Remarques* : On assimile les polynômes avec les fonctions polynômes ; par exemple, le polynôme  $X + a$  désignera simultanément la fonction ( $x \mapsto x + a$ ). Toutes les réponses devront en outre être dûment justifiées.

I) 1) Montrer que  $F_a$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , et qu'il est stable pour le produit des polynômes.

2) Montrer que  $C_a$  est une base de  $E$ . (Formule de Taylor, ou récurrence :  $\text{Vect}(1, (X + a), \dots, (X + a)^n) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ ).

3) Montrer que  $P$  est dans  $F_a$  si et seulement si  $P(-a) = 0$ . En déduire une représentation cartésienne de  $F_a$  dans  $C_a$ .

4) En déduire que  $F_a$  est un hyperplan de  $E$ .

5) Donner une base de  $F_{-1} \cap F_1$ .

II) 1) Calculer  $f_1(1), f_1(X), f_1(X^2), f_1(X^n)$  (distinguer les cas  $n$  impair et  $n$  pair).

2) Montrer que  $f_a$  est une application linéaire.

3) Donner le noyau et l'image de  $f_a$ .

4) Montrer que pour tout couple  $(P, Q)$  de polynômes :  $f_a(PQ) = f_a(P)f_a(Q)$  (c'est donc un homomorphisme d'algèbre).

5) Quel est l'ensemble d'arrivée de  $g_a$  ?

6) Montrer que  $g_a$  est une application linéaire.

7) Donner son noyau et son image.

III) 1) Montrer que  $\phi_a$  est une forme bilinéaire symétrique positive.

2)  $\phi_a$  est-elle un produit scalaire ?

3) Montrer que la restriction de  $\phi_a$  à  $F_a^2$  est un produit scalaire.

4) Donner  $(F_{-1} \cap E')^\perp$  (dans  $E'$ ) pour le produit scalaire restriction de  $\phi_1$  à  $E'^2$  (Si c'est un produit scalaire sur  $F_1$ , c'en est un sur  $E'$  ; et  $F_{-1} \cap E'$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E'$ ).

IV) 1) Montrer que  $D$  est une base de  $E_2$ .

2) On note  $\tilde{\phi}_1$  la restriction de  $\phi_1$  à  $E_2$ . Donner la matrice  $M$  de  $\tilde{\phi}_1$  dans  $B_2$  et  $M'$  sa matrice dans  $D$ .

3) Existe-t-il des formes bilinéaires  $\psi$  symétriques définies positives sur  $E_2^2$  telles que pour tout couple de polynômes  $(P, Q)$  de  $E^2$  :  $\psi(P, Q) = \tilde{\phi}_1(P, Q)$  (alors  $\psi$  est un produit scalaire).

4) Déterminer, si elle existe  $\psi$  telle que  $\psi(1, 1) = 1, \psi(1, X + 1) = \psi(1, (X + 1)^2) = 0$ .

5) Donner  $(F_{-1} \cap E_2)^\perp$  pour le produit scalaire  $\psi$  (obtenu au IV.4).