TSI2 / DS2-2007-2008 / corrigé.

I.1) $(X + a).\Theta = \Theta$ donc $\Theta \in F_a$ qui est non vide. La propriété de combinaison linéaire est ensuite immédiate car $(X + a)$ se met en facteur. C'est donc bien un sous-espace vectoriel.

Par ailleurs $(X + a)[(X + a)PQ] \in F_a$ donc il est stable pour le produit.

I.2) Il suffit de montrer par récurrence sur n que $\mathrm{Vect}(1, (X + a), (X + a)^2, ..., (X + a)^n) = \mathrm{Vect}(1, X, ..., X^n)$. C'est vrai pour $n = 0$ ($\mathrm{Vect}(1) = \mathrm{Vect}(1)$) ; on suppose que c'est vrai jusqu'au rang n ; au rang $n + 1$: d'après le théorème d'échange : $(X + a)^{n+1} \in \mathrm{Vect}(1, X, ..., X^n, X^{n+1})$ et $(X + a)^{n+1} \notin \mathrm{Vect}(1, X, ..., X^n)$ dont on déduit : $X^{n+1} \in \mathrm{Vect}(1, X, ..., X^n, (X + a)^{n+1}) = \mathrm{Vect}(1, (X + a), (X + a)^2, ..., (X + a)^n, (X + a)^{n+1})$ (hypothèse de récurrence). Il s'en suit que $\mathrm{Vect}(1, (X + a), (X + a)^2, ..., (X + a)^n, (X + a)^{n+1}) = \mathrm{Vect}(1, X, ..., X^n, X^{n+1})$, ce qui prouve la propriété.

Autre méthode, formule de Taylor en $-a$: $P(X) = P(-a) + P'(-a).(X + a) + \frac{P''(-a)}{2!}.(X + a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(-a)}{n!}.(X + a)^n$, d'où le résultat.

On peut aussi utiliser les deux théorèmes suivants, à condition de les citer intégralement :

- *Théorème 1* : Une famille de polynômes non nuls, de degrés deux à deux distincts est libre.
- *Théorème 2* : Une famille A de polynômes contenant des polynômes de degrés respectifs $n_1, n_2, ..., n_k$, est telle que : $\mathrm{Vect}(X^{n_1}, X^{n_2}, ..., X^{n_k}) \subset \mathrm{Vect}(A)$.
- *Attention* : F_a n'est pas une application, il est donc incorrect et interdit d'écrire F_a(quelque chose).

I.3) $P \in F_a \Leftrightarrow \exists\, Q \in E$ tel que $P(X) = (X + a).Q(X)$; $P(X) = (X + a).Q(X) \Rightarrow P(-a) = 0$.

Réciproquement : $P(-a) = 0 \Rightarrow (X + a)$ divise P, d'où le résultat.

Q possède une décomposition dans C_a car c'est une base : $Q(X) = b_0 + b_1(X + a) + b_2(X + a)^2 + ... + b_n(X + a)^n$.

Alors : $P(X) = a_0 + a_1(X + a) + a_2(X + a)^2 + ... + a_{n+1}(X + a)^{n+1} = b_0(X + a) + b_1(X + a)^2 + ... + b_n(X + a)^{n+1}$. D'où l'équation cartésienne de F_a dans C_a est : $(a_0 = 0)$, ou bien : $(P(-a) = 0)$.

On peut faire ici une remarque intéressante : $P(X) = (X + a)Q(X) + P(-a)$.

I.4) F_a étant défini par une équation cartésienne unique, c'est un hyperplan.

I.5) Pour que P soit à la fois dans F_{-1} et F_1 il faut qu'il soit divisible par $(X^2 - 1)$. Il existe donc un polynôme Q tel que : $P(X) = (X^2 - 1).Q(X)$. Comme $Q(X)$ s'exprime dans B, une base de $F_{-1} \cap F_1$ est (par exemple) :

$((X^2 - 1), (X^2 - 1).X, (X^2 - 1).X^2, ..., (X^2 - 1).X^n, ...)$.

II.1) $f_1(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par $(X + 1)$, c'est donc un réel (degré 0). En conséquence :

$f_1(1) = 1$; $f_1(X) = -1$ (car $X = (X + 1) - 1$) ; $f_1(X^2) = 1$ (car $X^2 = (X - 1)(X + 1) + 1$).

Si n impair alors : $f_1(X^n) = -1$ (car $X^n = (X^{n-1} - X^{n-2} + ... - X + 1)(X + 1) - 1$).

Si n pair alors : $f_1(X^n) = 1$ (car $X^n = (X^{n-2} + X^{n-4} + ... + 1)(X - 1)(X + 1) + 1$). Conclusion : $f_1(X^n) = (-1)^n$.

- *Remarque* : On peut aussi utiliser le fait que $f_a(P) = P(-a)$, auquel cas c'est plus simple. (Si on a fait la bonne remarque en I.3).

II.2) $f_a(P_1) = r_1 \Rightarrow P_1(X) = (X + a)Q_1(X) + r_1$; $f_a(P_2) = r_2 \Rightarrow P_2(X) = (X + a)Q_2(X) + r_2$; d'où l'on déduit :

$(P_1 + P_2)(X) = (X + a)(Q_1 + Q_2)(X) + (r_1 + r_2)$, d'où il s'en suit que : $f_a(P_1 + P_2) = f_a(P_1) + f_a(P_2)$. De même : $f_a(\alpha.P_1) = \alpha.f_a(P_1)$ car $\alpha.P_1(X) = (X + a).\alpha Q_1(X) + \alpha r_1$.

- *Remarque* : Si on écrit $f_a(\alpha.P) = \alpha.P - \alpha.(X + a)Q$, ou $f(P_1 + P_2) = P_1 + P_2 - (X + a)(Q_1 + Q_2)$, cela revient à admettre dès le départ que la propriété qu'on veut prouver est vraie car on l'utilise pour faire sa propre preuve.

II.3) Le noyau est l'ensemble des polynômes divisibles par $(X + a)$ donc $\mathrm{Ker}(f) = F_a$. Et de toute évidence : $\mathrm{Im}(f_a) = \mathbb{R}_0[X]$ (qu'on peut assimiler à $\mathbb{R}$).

II.4) On procède comme pour la somme : $P_1P_2(X) = (X + a)((X + a)Q_1(X)Q_2(X) + r_2Q_1(X)+ r_1Q_2(X)) + r_1r_2$, d'où le résultat.

II.5) $P(X) = (X + a)Q(X) + f_a(P)$ donc $g_a(P)(X) = \dfrac{P(X) - f_a(P)}{X + a} = Q(X)$; l'ensemble d'arrivée est donc E.

II.6) En reprenant les notations de II.2 on établit facilement que c'est une application linéaire car on a alors : $g(P_1 + P_2) = Q_1 + Q_2$ et $g(\alpha.P_1) = \alpha.Q_1$.

- *Remarque* : $g_a(P)$ est le quotient de la division de P par $(X + a)$; on a donc : $P(X) = (X + a)g_a(P)(X) + P(-a)$.

II.7) Puisque le quotient peut être un polynôme quelconque alors $\mathrm{Im}(g_a) = E$. Par contre pour être dans le noyau il faut que le quotient soit nul, ce qui est le cas des polynômes constants, donc $\mathrm{Ker}(g_a) = \mathbb{R}_0[X]$.

III.1) La bilinéarité de ϕ_a est une conséquence de la linéarité de g_a et de celle de l'intégrale. La symétrie vient de la commutativité de la multiplication des polynômes. Elle est positive car l'intégrale d'une fonction positive est positive.

III.2) Elle n'est pas définie car si P est un polynôme constant non nul alors $g_a(P) = 0$ donc $\phi_a(P, P) = 0$. Ce n'est donc pas un produit scalaire.

III.3) Les éléments de F_a sont invariants par g_a, ϕ_a est donc dans ce cas le produit scalaire intégral défini dans le cours. Attention, il faut préciser que $\phi_a(P, P) = 0 \Rightarrow P$ est nul sur $[0, 1]$, mais P étant un polynôme il est alors nul partout.

III.4) $E' = F_1 \cap E_2$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus deux divisibles par $(X + 1)$; il est donc clair que ce sont les polynômes de la forme : $Q(X) = (X + 1)(aX + b)$.

$F_{-1} \cap E' = F_{-1} \cap F_1 \cap E_2$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus deux divisibles par $(X^2 - 1)$; il s'agit donc des polynômes de la forme : $P(X) = \alpha(X^2 - 1)$.

On cherche donc a et b pour que Q soit orthogonal à P : $\int_0^1 P(x)Q(x)dx = 0$. On remplace et on calcule :

$$\int_0^1 P(x)Q(x)dx = \int_0^1 \alpha(x^2 - 1)(x + 1)(ax + b)dx = \alpha.\int_0^1 (ax^4 + (a + b)x^3 + (b - a)x^2 - (a + b)x - b)dx = \frac{-23a}{60} - \frac{11b}{12}. = 0.$$

Alors : $b = \dfrac{-23a}{55}$, et, en posant $a = 55k$: $Q(X) = k.(X + 1)(55X - 23) = k.(55X^2 + 32X - 23)$. D'où finalement :

$(F_{-1} \cap E')^{\perp} = \mathrm{Vect}(55X^2 + 32X - 23)$. (*Remarque* : $\dim(E') = 2$, $\dim(F_{-1} \cap E') = \dim((F_{-1} \cap E')^{\perp}) = 1$).

IV.1) La même démonstration qu'en I.2 prouve aussi que D est une base de E_2.

IV.2) Étant donnés deux polynômes P et Q de E_2, $\tilde{\phi}_1(P, Q) = \int_0^1 g_1(P)g_1(Q))(x)dx$. Il faut donc déterminer la division euclidienne de $P(X) = aX^2 + bX + c$ par $(X + 1)$: $aX^2 + bX + c = (aX + b - a)(X + 1) + a - b + c$. En notant ensuite : $Q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, on a ainsi : $\tilde{\phi}_1(P, Q) = \int_0^1 (ax + b - a)(\alpha x + \beta - \alpha)dx$, donc :

$$\tilde{\phi}_1(P, Q) = \int_0^1 (a\alpha x^2 + (a\beta + b\alpha - 2a\alpha)x + a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta)dx =$$

$\tilde{\phi}_1(P, Q) = \dfrac{a\alpha}{3} - \dfrac{a\beta}{2} - \dfrac{b\alpha}{2} + b\beta$. La matrice est donc : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ dans la base $B_2 = (1, X, X^2)$.

La matrice de passage est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; on a ainsi : $M' = {}^tTMT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 7/3 \end{pmatrix}$.

IV.3) L'équation de E' dans E_2 est, pour $P(X) = \alpha + \beta(X+1) + \gamma(X+1)^2$: $(\alpha = 0)$. La matrice N de ψ dans la base D sera donc de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 1 & 3/2 \\ c & 3/2 & 7/3 \end{pmatrix}$.

Alors : $\psi(P, P) = {}^t(P_D)NP_D = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + 2c\alpha\gamma + \beta^2 + 3\beta\gamma + \frac{7\gamma^2}{3}$. Comme $\psi(1, 1) > 0$ alors $a > 0$.

On ne demande que d'en trouver une, autant trouver directement celle qui est demandée ensuite :

$\psi(1, 1) = 1$, $\psi(1, X+1) = \psi(1, (X+1)^2) = 0 \Rightarrow a = 1$, $b = c = 0$. Alors :

$\psi(P, P) = \alpha^2 + \beta^2 + 3\beta\gamma + \frac{7\gamma^2}{3}$. Le trinôme $\beta^2 + 3\beta\gamma + \frac{7\gamma^2}{3}$ a pour discriminant $\Delta = -1/3$, son unique annulation est donc obtenue pour $\beta = \gamma = 0$; il est clair qu'ensuite il faut que $\alpha = 0$. ψ est bien définie.

IV.4) La matrice de ψ dans D est : $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 7/3 \end{pmatrix}$.

IV-5) Un polynôme quelconque de $F_{-1} \cap E_2$ est de la forme : $Q(X) = (X-1)(aX+b)$; on l'exprime dans D : $Q(X) = 3a - 2b + (b - 3a)(X+1) + a(X+1)^2$. On cherche $P(X) = \alpha + \beta(X+1) + \gamma(X+1)^2$ tel que quelles que soient les valeurs de a et b on ait : $\psi(P, Q) = 0$ (qu'on calcule plus rapidement avec la matrice).

$\psi(P, Q) = ((9(2\alpha - \beta) - 13\gamma)a + (2(2\alpha - \beta) - 3\gamma)b)/6$.

Il faut que les facteurs de a et de b soient nuls : donc : $\beta = 2\alpha$ et $\gamma = 0$; d'où : $P(X) = \alpha(2X+3)$. Donc : $(F_{-1} \cap E_2)^{\perp} = \mathrm{Vect}(2X+3)$. (*Remarque* : $\dim(E_2) = 3$, $\dim(F_{-1} \cap E_2) = 2$ et $\dim((F_{-1} \cap E_2)^{\perp}) = 1$).