

TSI2 / DS3-2007-2008.

Soit $H = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques réelles ; $\mathbb{R}[X]$ est assimilé aux fonctions polynômes, ce qui fait qu'il peut être considéré comme un sous-espace vectoriel de H . Soit encore G l'ensemble des polynômes pairs de $\mathbb{R}[X]$: $G = \{P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R} : P(-x) = P(x)\}$, et la famille $C = (1 + X^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

I) 1) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que si $P \in G^*$, où $G^* = G \setminus \{0_H\}$, alors les monômes de P sont tous de degrés pairs.

3) Montrer que G est stable pour la multiplication.

4) Montrer que C est une base de G .

II) 1) Soit $A = \{(x \mapsto \ln(P(x))), P \in G, \forall x \in \mathbb{R} : P(x) > 0\}$, montrer que A contient la fonction nulle et qu'il est stable pour l'addition.

2) A est-il un sous-espace vectoriel de H ?

3) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$; on note plus simplement : $\ln(a + X^2) = (x \mapsto \ln(a + x^2))$, etc... Montrer que $\ln(a + X^2)$ et $\ln(b + X^2)$ sont deux éléments de A linéairement indépendants.

4) On note : $E = \text{Vect}(A)$, $B = \{\ln(1 + X^{2n}), n \in \mathbb{N}\}$, et $F = \text{Vect}(B)$. Montrer que B est une base de F . (On pourra se placer au voisinage de 0).

5) Montrer que $F \subset E$. Y a-t-il égalité ?

III) On admet qu'il existe un produit scalaire sur E tel que, pour $m \neq 0, n \neq 0, m \neq n$:

$$(\ln(a_0 + a_n X^{2n}) | \ln(b_0 + b_n X^{2n})) = \frac{\ln(a_0)\ln(b_0)}{\ln^2(2)} + \frac{a_n b_n}{a_0 b_0} \quad (\text{on rappelle que, dans } A : a_0 > 0, \text{ et } b_0 > 0).$$

$$(\ln(a_0 + a_m X^{2m}) | \ln(b_0 + b_n X^{2n})) = \frac{\ln(a_0)\ln(b_0)}{\ln^2(2)}.$$

1) Montrer que B est une famille orthonormale.

2) On note $T_Q(P) = \ll P \text{ tronqué selon } Q \gg =$ les termes de P de degrés inférieurs ou égaux à $d^\circ(Q)$. Montrer que, pour $P(X) = a_0 + a_n X^{2n}$, $Q(X) = b_0 + b_n X^{2n}$, et $R(X) = c_0 + c_n X^{2n}$, tous dans E et non constants :

$$(\ln(P) | \ln(R)) + (\ln(Q) | \ln(R)) = (\ln(T_R(PQ)) | \ln(R)).$$

3) Soit n un entier naturel qui ne peut pas être mis sous la forme $\frac{m}{2^k} - \frac{1}{2}$ (quand m et k prennent toutes les valeurs possibles dans \mathbb{N}). On note P_n le polynôme $P_n(X) = 1 + X^2 + X^4 + \dots + X^{2n}$, et on admet finalement que, pour tout entier naturel m non nul :

$$(\ln(P_n) | \ln(2)) = 0, \text{ et : } (\ln(P_n) | \ln(1 + X^{2m})) = 1 \quad (\text{serait nul dans le cas exclu au départ}).$$

a) Soit p_m la projection orthogonale sur $F_m = \text{Vect}(\ln(1 + X^{2k}), k \in \mathbb{N}, k \leq m)$, calculer $p_m(\ln(P_n))$.

b) Pour un réel x donné, on note $s(x)$ la limite quand m tend vers l'infini lorsqu'elle existe de $p_m(\ln(P_n))(x)$. Montrer que cette limite lorsqu'elle existe ne dépend pas de n .

c) Pour quelles valeurs de x cette limite existe-t-elle ? Converge-t-elle alors vers $\ln(P_n(x))$ (au sens des séries numériques) ?

IV) 1) On considère la norme associée à ce produit scalaire dans F ; donner la norme du vecteur u donné dans la base B par $u = (x \mapsto \alpha_0 \ln(2) + \dots + \alpha_n \ln(1 + x^{2n}))$, qu'on peut aussi écrire : $u : (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0, \dots)_B$.

2) a) Montrer que, pour $0 < \lambda : 1 - 2\lambda \leq e^\lambda$, et pour $0 < \lambda \leq \ln(3) : e^\lambda \leq 1 + 2\lambda$.

b) On définit l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par : $f(u) = e^{u(1)}$. Montrer que f est continue en 0_E .