

# TSI2 / DS4-2007-2008.

CCP 2004 TSI - Mathématiques I (m04pt1e).

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

**Objet :** La transformation de Fourier est un outil employé en sciences de l'ingénieur. En plus d'être linéaire, elle vérifie de nombreuses propriétés. Nous nous proposons d'en établir quelques-unes en nous limitant à un espace vectoriel particulier.

## I) Préliminaires.

On note  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des fonctions définies, continues et infiniment dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

On note  $\mathcal{P}$  le sous-espace vectoriel de  $E$  des fonctions  $f$  de la forme  $f(t) = P(t).e^{-\pi t^2}$  où  $P$  est un polynôme à coefficients complexes.

Pour tout  $n$  entier naturel, on note  $\mathcal{P}_n$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{P}$  des fonctions  $f$  de la forme  $f(t) = P(t).e^{-\pi t^2}$  où  $P$  est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

### I.1) Quelques endomorphismes qui nous seront utiles.

Soit  $T, D, S$  trois applications qui, à une fonction  $f$  de  $E$  associent respectivement les fonctions suivantes :

$$T(f) = g \text{ avec pour tout } t \text{ réel } g(t) = t.f(t).$$

$$D(f) = f'.$$

$$S(f) = h \text{ avec pour tout } t \text{ réel } h(t) = f(-t).$$

Montrer que les applications  $T, D, S$  définissent chacune un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $S$  est un automorphisme. Donner  $S^{-1}$ .

### I.2) Étude des intégrales utilisées.

a) Justifier l'existence de  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ . De nombreuses méthodes permettent d'obtenir  $J = \sqrt{\pi}$  ; on l'admettra.

En déduire la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$ .

b) Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{P}$ , justifier la convergence absolue de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ .

c) Pour tout réel  $u$ , pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{P}$ , justifier la convergence absolue de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi ut} dt$ .

### I.3) Définition de la transformation de Fourier (notée $\phi$ ici).

Soit  $\phi$  l'application qui à tout  $f$  de  $\mathcal{P}$  associe si elle existe la fonction  $\phi(f) = \psi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant :

$$\text{pour tout } u \text{ réel } \psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi ut} dt.$$

Vérifier que  $\phi$  est bien définie sur  $\mathcal{P}$ , puis montrer que  $\phi$  est une application linéaire.

## II) Deux formules pour l'application linéaire $\phi$ .

On conservera par la suite les notations suivantes :  $f$  un élément de  $\mathcal{P}$ , défini par :  $f(t) = P(t).e^{-\pi t^2}$  pour tout  $t$  réel. Son image par  $\phi$  :  $\psi = \phi(f)$  définie par  $\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi ut} dt$  pour tout  $u$  réel.

### II.1) Première formule.

Justifier la dérivabilité de  $\psi$ , calculer  $\psi'(u)$  et montrer que dans  $\mathcal{P}$  on a :  $\psi' = -2i\pi.\phi(g)$  avec  $g(t) = t.f(t)$ .

Que l'on peut écrire de façon plus formelle :  $D \circ \phi = -2i\pi(\phi \circ T)$  formule que l'on notera (I).

En remarquant que  $\psi'$  est l'image d'une fonction de  $\mathcal{P}$ , en déduire que  $\psi$  est infiniment dérivable et est donc un élément de  $E$ .

## II.2) Deuxième formule.

Par une intégration par parties, montrer que dans  $\mathcal{P}$  on a :  $\phi(f') = \psi_1$  avec  $\psi_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t).e^{-2i\pi ut} dt = 2i\pi u.\psi(u)$ .

Que l'on peut écrire de façon plus formelle :  $\phi \circ D = 2i\pi(T \circ \phi)$  formule que l'on notera (2).

## III) $\phi$ est un endomorphisme.

III.1) Pour tout  $k$  entier naturel, on note  $b_k$  la fonction qui à tout  $t$  réel associe  $b_k(t) = t^k . e^{-\pi t^2}$ . Pour tout  $n$  entier naturel, on considère la famille  $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$ , justifier que celle-ci constitue une base de  $\mathcal{P}_n$ . On pose  $\phi(b_k) = B_k$ .

III.2) Donner l'ensemble  $\mathcal{SG}$  des solutions de l'équation différentielle (E) :  $f'(t) + 2\pi t.f(t) = 0$  si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de classe  $C^1$ .

III.3) Vérifier que  $b_0$  est un élément de  $\mathcal{SG}$ , noter la relation différentielle qui en découle en utilisant les endomorphismes  $D$  et  $T$ , en déduire une relation différentielle vérifiée par  $B_0$ , puis montrer l'existence d'une constante complexe  $\lambda$  telle que, pour tout  $u$  réel,  $B_0(u) = \lambda . e^{-\pi u^2}$ . Exprimer  $B_0(0)$  sous forme d'une intégrale et en déduire la valeur de  $\lambda$ .

III.4) Pour tout  $k$  entier naturel non nul, on a la relation  $b_k = T(b_{k-1})$ . Calculer  $B_1, B_2, B_3$ , puis montrer par récurrence que  $B_k = \phi(b_k)$  est un élément de  $\mathcal{P}_k$ . En déduire que pour tout  $n$  entier naturel non nul, si  $f$  est un élément de  $\mathcal{P}_n$ , il en est de même de  $\phi(f)$ . Montrer alors que  $\phi$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{P}$ .

## IV) Étude en dimension 4.

Soit  $n$  un entier naturel. On note  $S_n$  l'endomorphisme de  $\mathcal{P}_n$  tel que  $S_n(f) = S(f)$  et  $\phi_n$  l'endomorphisme de  $\mathcal{P}_n$  tel que  $\phi_n(f) = \phi(f)$ .

IV.1) Écrire les matrices de  $\phi_3$  et  $S_3$  dans la base  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  de  $\mathcal{P}_3$ .

IV.2) Expliciter  $\phi_3 \circ \phi_3$  en fonction de  $S_3$ . En déduire que  $\phi_3$  est inversible et donner son inverse.

## V) $\phi$ est bijectif. Quel est son inverse ?

Pour tout endomorphisme  $A$ , on note  $A^2 = A \circ A$ , et pour tout  $m$  entier naturel non nul  $A^m = A \circ A^{m-1} = A^{m-1} \circ A$  avec la convention  $A^0 = I$  qui représente l'application identité sur  $\mathcal{P}$ . Pour tout  $j$  entier naturel, on note  $b_0^{(j)}$  la  $j^{\text{ième}}$  dérivée de  $b_0$ , on a donc  $b_0^{(j)} = D^j(b_0)$  (on posera  $b_0^{(0)} = b_0$ ).

V.1) Pour tout  $j$  entier naturel non nul, exprimer  $\phi(b_0^{(j)})$  en fonction de  $b_0$  et  $T$ , puis en fonction de  $b_j$ .

V.2) Pour tout  $k$  entier naturel non nul, on a la relation  $b_k = T(b_{k-1}) = T^k(b_0)$ ; exprimer  $\phi(b_k)$  en fonction de  $b_0$  et  $D$ , puis en fonction de  $b_0^{(k)}$ .

V.3) Exprimer alors  $\phi^2(b_k)$ . En déduire que  $\phi$  est bijectif, justifier les deux formules suivantes :  $\phi \circ \phi = S$  et  $\phi^{-1} = S \circ \phi = \phi \circ S$ . Cette dernière relation nous permettra par la suite de permuter  $S$  et  $\phi$ .

V.4) Montrer que  $\phi^{-1} = \phi^3$ .

## VI) Valeurs propres et vecteurs propres de $\phi_3$ .

VI.1) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme  $\phi_3$ ; cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

VI.2) Déterminer une base de  $\mathcal{P}_3$  formée de vecteurs propres de  $\phi_3$ .

VI.3) Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $t$  réel par :  $f(t) = P(t).e^{-\pi t^2}$ , avec  $P(t) = 1 + t^2 + t^3$ . Décomposer  $f$  dans la base trouvée à la question précédente.