Lycée Jean Perrin
Classe de TSI$_1$ 2006/2007 Formulaire 1

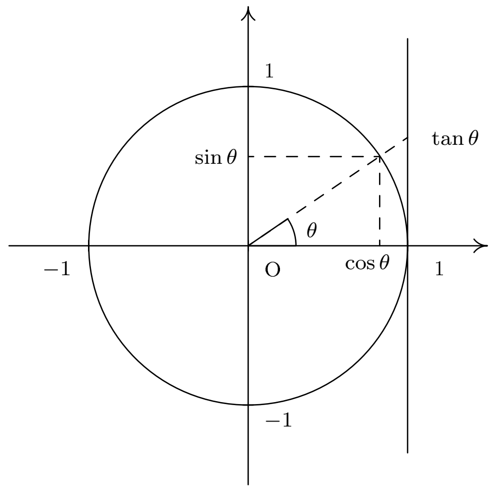
Trigonométrie

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1. Soit M un point de $\mathcal{C}$, et $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. M a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, respectivement impaire et paire.

On définit également la fonction tangente sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Cette fonction est impaire et π-périodique.



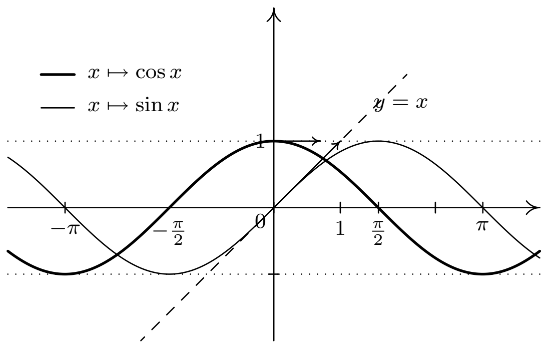
Proposition 1. *1) Les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$*, et on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\cos' x = -\sin x \qquad \sin' x = \cos x$$

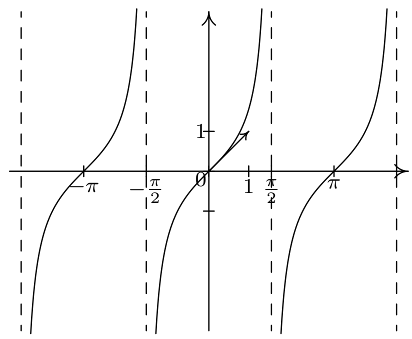
2) La fonction $\tan$ *est dérivable sur* $\mathcal{D}_{\tan}$*, et on a pour tout* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *:*

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$*, donc la courbe du sinus se déduit de celle du cosinus par translation de vecteur* $(\frac{\pi}{2}, 0)$*.*



Courbe représentative des fonctions $\sin$ et $\cos$



Courbe représentative de la fonction $\tan$

I Formules à connaître par cœur :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2 a &= \frac{1+\cos 2a}{2} \\
\sin^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2}
\end{aligned}$$

Avec $t = \tan \frac{\theta}{2}$:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\sin\theta &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\tan\theta &= \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{si } t^2 \neq 1
\end{aligned}$$

Tableau des valeurs usuelles :

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	non déf.

II Formules à savoir retrouver rapidement :

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\
&= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\
\sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\
\tan 2a &= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Il faut enfin être capable de simplifier très facilement certaines expressions en s'aidant du cercle trigonométrique. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\sin(\pi+\theta) &= -\sin\theta \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) &= -\sin\theta \\
\cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta
\end{aligned}$$