A1) TD : Suites.

A1.1) Étudier la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{u_n}}$.

- *Corrigé* : La fonction $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$ admet une dérivée strictement positive : $f'(x) = 1/4\sqrt{x}\sqrt{2 + \sqrt{x}}$; la suite croît donc comme $u_1 - u_0 = \sqrt{2}$, elle est strictement croissante. On peut montrer simplement qu'elle est borné, par exemple par 4 : $u_0 < 4$, $u_n < 4 \Rightarrow u_{n+1} < f(4) = 2 < 4$ (cqfd). Il s'en suit qu'elle converge.
Il faut donc rechercher un point fixe $x \geq 0$: $f(x) = x \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = (x^2 - 2)^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$.
La racine 1 est évidente : $(x - 1)(x^3 + x^2 - 3x - 4) = 0$. Comme 1 n'est pas point fixe (cf. l'implication), il reste à résoudre $g(x) = x^3 + x^2 - 3x - 4 = 0$; $g'(x) = 3x^2 + 2x - 3$ admet l'unique racine positive $(\sqrt{10} - 1)/3$ dont l'image par g vaut $-(79 + 20\sqrt{10})/27$ et comme $g(2) = 6 > 0$, selon le théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique annulation $\alpha \approx 1{,}83$ qui est aussi la limite de la suite (u_n).

Avec MAPLE : $\alpha = ((316 + 12\sqrt{249})^{1/3} + 40.(316 + 12\sqrt{249})^{-1/3} - 2)/6$.

A1.2) Étudier la suite définie par : *a*) $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$; *b*) $u_0 < 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$.

- *Corrigé* : *a*) On montre par récurrence que la suite est strictement positive. Ensuite : $u_{n+1} - u_n = 1/u_n > 0$. La suite est donc strictement croissante. Supposons qu'elle admet une limite finie a ; alors :
$a = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (u_n + 1/u_n) = a + 1/a$, d'où : $1/a = 0$, ce qui est impossible. Il s'en suit que : $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

b) On montre d'abord par récurrence que la suite est strictement négative. Ensuite : $u_{n+1} - u_n = 1/u_n < 0$. La suite est donc strictement décroissante. Supposons qu'elle admet une limite finie a ; alors :
$a = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (u_n + 1/u_n) = a + 1/a$, d'où : $1/a = 0$, ce qui est impossible. Il s'en suit que : $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

A1.3) Étudier la suite définie par : u_0 donné et $u_{n+1} = a.u_n + b$, où a et b sont des réels donnés (montrer qu'il existe dans certains cas une constante k telle que $v_n = u_n + k$ est une suite géométrique).

- *Corrigé* : Si $a = 0$ c'est une suite constante ; si $a = 1$ c'est une suite arithmétique. On suppose ensuite $a \neq 0$ et $a \neq 1$:

On cherche $v_n = u_n + k$ telle que $v_{n+1} = a.v_n$: $u_{n+1} + k = a(u_n + k) = a.u_n + b + k$, d'où : $k = b/(a - 1)$. Par suite : $v_n = v_0.a^n$, et $u_n = (u_0 + b/(a - 1)).a^n - b/(a - 1)$.

A1.4) Soit une suite (u_n) telle que les sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

- *Corrigé* : (u_{6n}) admet la même limite que (u_{2n}) et (u_{3n}) car c'est une suite extraite commune. Donc (u_{2n}) et (u_{3n}) admettent la même limite.
(u_{6n+3}) admet la même limite que (u_{2n+1}) et (u_{3n}) car c'est une suite extraite commune. Donc (u_{2n+1}) et (u_{3n}) admettent la même limite.
Par suite, les trois sous-suites admettant la même limite, la réunion des sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) englobant tous les termes de la suite (u_n), elle converge vers cette limite commune.

A1.5) Soit une fonction numérique f dérivable telle que sa dérivée admette une limite finie ou non en $+\infty$. Étudier la suite (u_n) définie par : $u_n = f(n + 1) - f(n)$. (Utiliser le théorème des accroissements finis).

- *Corrigé* : T.A.F. : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in]n, n+1[$, $u_n = f(n + 1) - f(n) = f'(x_n)$. Il s'en suit que (u_n) admet la même limite que f' (car $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x_n)$).

A1.6) Étudier le couple de suites définis par : $0 < u_0 < v_0$, et : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$. (Montrer qu'elles sont adjacentes).

- *Corrigé* : On montre facilement par récurrence que les deux suites sont strictement positives. On calcule ensuite $v_{n+1} - u_{n+1} = (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2/2$, ce qui prouve que (v_n) majore (u_n) à partir du rang 1 ; comme l'énoncé admet cette propriété au rang 0, elle est vraie sur $\mathbb{N}$. Ensuite : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$, (u_n) est croissante, de même $v_{n+1} - v_n = (u_n - v_n)/2$, (v_n) est décroissante. Il s'en suit que ces deux suites convergent car (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) est minorée par u_0 (il est interdit d'utiliser des minorants ou majorants dépendant de n pour conclure, car la suite $w_n = n$ est croissante majorée par $n + 1$). Enfin, si on appelle a et b les limites respectives de (u_n) et (v_n), alors, en passant à la limite dans la définition des suites : $a = \sqrt{ab}$ et $b = (a + b)/2$, d'où l'on déduit facilement que $a = b$; ce sont bien des suites adjacentes (il serait beaucoup plus difficile ici de montrer que la différence tend vers 0).

A1.7) Étudier le couple de suites définis par : $0 < u_0 < v_0$, et : $u_{n+1} = 2u_nv_n/(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$. (Montrer qu'elles sont adjacentes).

- *Corrigé* : On montre facilement par récurrence que les deux suites sont strictement positives. On calcule ensuite $v_{n+1} - u_{n+1} = (v_n - u_n)^2/2(u_n + v_n)$, ce qui prouve que (v_n) majore (u_n) à partir du rang 1 ; comme l'énoncé admet cette propriété au rang 0, elle est vraie sur $\mathbb{N}$. Ensuite : $u_{n+1} - u_n = u_n(v_n - u_n)/(u_n + v_n)$, (u_n) est croissante, de même $v_{n+1} - v_n = (u_n - v_n)/2$, (v_n) est décroissante. Il s'en suit que ces deux suites convergent car (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) est minorée par u_0 (il est interdit d'utiliser des minorants ou majorants dépendant de n pour conclure, car la suite $w_n = n$ est croissante majorée par $n + 1$). Enfin, si on appelle a et b les limites respectives de (u_n) et (v_n), alors, en passant à la limite dans la définition des suites : $a = 2ab/(a + b)$ et $b = (a + b)/2$, d'où l'on déduit facilement que $a = b$; ce sont bien des suites adjacentes (il serait beaucoup plus difficile ici de montrer que la différence tend vers 0).

A1.8) *a*) Étudier la suite (u_n) définie par : $u_n = (\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k})/\sqrt{n}$ (montrer que : $\int_k^{k+1} dt/\sqrt{t} \leq 1/\sqrt{k} \leq \int_{k-1}^{k} dt/\sqrt{t}$).

b) Soit $v_n = \sqrt{n}(u_n - 2)$, et $w_n = v_{n-1} - v_n$; étudier la série de terme général w_n, puis la suite (v_n).

- *Corrigé* : *a*) $\int_k^{k+1} dt/\sqrt{t} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2/(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$, et : $\int_{k-1}^{k} dt/\sqrt{t} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 2/(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})$;

d'où : $2/(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \leq 2/(\sqrt{k} + \sqrt{k}) \leq 2/(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})$, c'est-à-dire : $\int_k^{k+1} dt/\sqrt{t} \leq 1/\sqrt{k} \leq \int_{k-1}^{k} dt/\sqrt{t}$. Par suite :

$(\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} dt/\sqrt{t})/\sqrt{n} \leq u_n \leq (\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} dt/\sqrt{t})/\sqrt{n}$, c'est-à-dire : $(\int_1^{n+1} dt/\sqrt{t})/\sqrt{n} \leq u_n \leq (\int_0^{n} dt/\sqrt{t})/\sqrt{n}$; et finalement :

$2(\sqrt{n+1} - 1)/\sqrt{n} \leq u_n \leq 2$, d'où l'on déduit que (u_n) converge vers 2.

b) $w_n = v_{n-1} - v_n = ... = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) - 1/\sqrt{n} = 2/(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) - 1/\sqrt{n} = ... = 1/\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2$, d'où l'on déduit

que w_n converge vers 0, mais surtout : $w_n \sim 1/4n^{3/2}$. La conséquence en est que la série de terme général w_n est convergente. Or : $\sum_{k=1}^{n} w_k = v_0 - v_n$; il est donc clair que la suite (v_n) converge.