A1) TD : Suites.

A1.1) Étudier la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

- *Corrigé* : On montre d'abord par récurrence que, pour tout n : $u_n > 0$ (ou 1). On dresse ensuite le tableau de variation des fonctions $f(x) = \sqrt{2x}$, voire $g(x) = \sqrt{2x} - x$, pour prouver par récurrence que la suite (u_n) est croissante. (Il existe aussi un théorème, malheureusement hors programme, qui dit que si f est croissante sur un intervalle stable contenant u_0, alors le sens de variation de (u_n) est donné par le signe de $u_1 - u_0$; on peut aussi utiliser la démonstration de ce théorème en se servant de l'égalité : $u_{n+1} - u_n = f^n(u_1) - f^n(u_0)$). Après ça, il faut montrer, toujours par récurrence, que (u_n) est majorée, par exemple par 2 (qui est un point fixe de f) ; elle est donc convergente, justement vers un point fixe de f, donc vers 2.

A1.2) Étudier la suite définie par : $u_0 < (-\sqrt{5} - 1)/2$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

- *Corrigé* : On pose, comme à l'exercice précédent, $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = -x^2 - x + 1$, et on dresse leurs tableaux de variation, qui établissent que f est stable et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, (-\sqrt{5} - 1)/2[$, d'où l'on déduit que (u_n) varie comme $u_1 - u_0 < 0$ donc (u_n) est décroissante et s'éloigne du point fixe $(-\sqrt{5} - 1)/2$ de f. Il s'en suit que (u_n) diverge vers $-\infty$.

A1.3) Étudier la suite définie par : $(\sqrt{5} - 1)/2 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

- *Corrigé* : On utilise les calculs de l'exercice précédent, qui établissent que f est stable et strictement décroissante sur $[0, 1]$, voire $]0, 1[$. Les puissances paires de f sont donc croissantes et ses puissances impaires décroissantes, ce qui fait considérer deux sous-suites des termes pairs et impairs (avec : $u_{n+1} - u_n = f^n(u_1) - f^n(u_0)$, etc.). Comme $u_2 - u_0 = u_0(u_0 - 1)g(u_0)$, $u_1 = f(u_0)$ et $u_3 - u_1 = u_1(u_1 - 1)g(u_1)$, on montre que (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante. Les points fixes de f sont les racines de $g(x) = 0$, c'est-à-dire : $(-1 \pm \sqrt{5})/2$, dont seule $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ est dans $]0, 1[$, et les deux sous-suites convergent vers cette limite donc (u_n) aussi.

A1.4) Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes puis qu'elles convergent vers e (on admet que $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, une démonstration sera proposée dans le corrigé). Pour tout couple d'entiers naturels p et q, on a donc $u_p < e \leq v_q$; montrer qu'il n'existe pas deux entiers naturels non nuls a et b tels que $e = a/b$ (e est irrationnel).

- *Corrigé* : Il est évident que $0 < u_n < v_n$, que (u_n) est croissante et que $(v_n - u_n)$ tend vers 0. Il ne reste plus qu'à montrer que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + 1/(n + 1)(n + 1)! - 1/n.n! = -1/(n + 1)(n + 1)! < 0$.

Les deux suites sont donc bien adjacentes et convergent vers la même limite. En admettant que $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, c'est évidemment la limite de (u_n) donc aussi de (v_n).

Démonstration : Soit, pour $x \in]1/2, 3/2[$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Alors, il est évident que $(S_n(x))$ est une suite positive croissante. Soit $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; cette suite est positive, décroissante et majorée ; seule la dernière affirmation pose problème, mais on établit facilement que $\frac{x^{n+p+1}}{(n+p+1)!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{x^p}{(n+2)(n+3)...(n+p+1)} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{1}{2^p}$, quand $x \leq 3/2$ et $n \geq 1$, car $\frac{x^p}{(n+2)(n+3)...(n+p+1)} \leq \frac{1}{2^p}.\frac{3}{n+2}.\frac{3}{n+3}...\frac{3}{n+p+1} \leq \frac{1}{2^p}$. Par suite : $R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} = 2.\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui prouve que $R_n(x)$ tend vers 0, dont une conséquence est que $S_n(x)$ converge. On écrit maintenant la série de Taylor de e^x : $\exists\, \theta \in]0, 1[$ tel que $e^x = S_n(x) + \frac{(\theta x)^{n+1}}{(n+1)!}$. Donc $S_n(x) < e^x \leq S_n(x) + \frac{(3/2)^{n+1}}{(n+1)!}$, par suite, d'après ce qui précède, on peut appliquer le théorème des gendarmes et alors : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. On a limité la démonstration à]1/2, 3/2[car on a seulement besoin de $x = 1$, mais on peut la modifier facilement pour l'étendre à tout l'ensemble des réels.

On suppose $e = a/b$. On a donc $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} < a/b \le \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + 1/q.q!$; en posant $p = q = b$ et en multipliant par $b!$ on a : $b!\sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} < a.(b-1)! \le b!\sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} + 1/b$. Comme $b!\sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}$ est de façon évidente un entier, on arrive à une inégalité du genre : $n < m \le n + 1/b$ donc, si $b > 1$: $n < m < n + 1$, ce qui est impossible. Par suite, $b = 1$, ce qui voudrait dire que e est un entier. Il suffit de calculer $u_2 = 5/2$ et $v_2 = 11/4$ pour voir que $2{,}5 < e \le 2{,}75$ ce n'est donc pas un entier.

A1.5) Montrer que, pour n assez grand, l'équation ($e^x = x^n$) admet deux solutions strictement positives ; soit u_n la plus petite des deux. Étudier la suite (u_n) ; donner un équivalent de u_n (quand n grand). (Étudier d'abord la fonction $f(x) = x - n.\ln(x)$, puis montrer que $f(u_{n+1}) > 0$ et $f(n + 1) < 0$; pour finir utiliser $u_n = 1 + v_n$).

- *Corrigé* : Soit $f(x) = x - n.\ln(x)$, et comme $f'(x) = 1 - n/x$; f est donc strictement décroissante de]0, n] sur $[n - n.\ln(n), +\infty[$ et strictement croissante de $[n, +\infty[$ sur $[n - n.\ln(n), +\infty[$. Pour $n \ge 3$, $n - n.\ln(n) < 0$, il y a donc deux racines à f telles que $x = n.\ln(x)$, ce qui équivaut à $e^x = x^n$. Soit u_n la plus petite des deux, donc dans l'intervalle]0, n[.

Par suite $f(u_{n+1}) = u_{n+1} - n.\ln(u_{n+1})$, et comme $u_{n+1} - (n + 1).\ln(u_{n+1}) = 0$, alors $f(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) = u_{n+1}/(n + 1) > 0$. En outre $f(n + 1) = (n + 1) - n.\ln(n + 1) = n.(1 + 1/n - \ln(n + 1)) < 0$ dès que $n \ge 3$ (on peut faire une étude). On en déduit, comme $u_{n+1} \in]0, n+1[$ mais que f est négative sur $[n, n + 1]$, que $u_{n+1} \in]0, n[$. En outre, comme f est décroissante sur cet intervalle, alors $u_{n+1} < u_n$ et (u_n) est décroissante, minorée donc convergente. Par suite $\ln(u_n) = u_n/n$ tend vers 0 (car u_n bornée), donc u_n tend vers 1.

On introduit v_n, qui converge vers 0, avec $1 + v_n = n.\ln(1 + v_n) = n.(v_n + o(v_n))$ d'où $(n - 1)v_n \approx 1 + n.o(v_n)$ et alors $v_n = 1/(n - 1) + o(v_n) = 1/n + o(v_n)$. En écrivant que $o(v_n)/v_n$ tend vers 0 dans cette dernière égalité, on montre que $n.v_n$ tend vers 1 ; on a donc bien $v_n = 1/n + o(1/n)$. On arrive ainsi à : $u_n = 1 + 1/n + o(1/n)$.

A1.6) Étudier le couple de suites définis par : $0 < u_0 < v_0$, et : $u_{n+1} = 2u_nv_n/(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n}$.

- *Corrigé* : La première démonstration se fait par récurrence :

Initialisation : $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$.
Hypothèse de récurrence : On suppose $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
Passage au rang suivant : Alors $u_nv_n > 0$, $u_n + v_n > 0$, d'où $u_{n+1} = 2u_nv_n/(u_n + v_n) > 0$, $v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} > 0$.

La propriété est donc vraie à tout rang.

Les autres non : $v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} - 2u_nv_n/(u_n + v_n) = ((u_n + v_n)\sqrt{u_nv_n} - 2u_nv_n)/(u_n + v_n) =$
$\sqrt{u_nv_n}(u_n - 2\sqrt{u_nv_n} + v_n)/(u_n + v_n)) = \sqrt{u_nv_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2/(u_n + v_n) > 0$ d'après la précédente. Donc, à partir du rang 1a propriété est démontrée. Et, comme elle est vraie au rang 0 par hypothèse, à tout rang on a : $u_n < v_n$.

$u_{n+1} - u_n = 2u_nv_n/(u_n + v_n) - u_n = (2u_nv_n - u_n(u_n + v_n)/(u_n + v_n) = u_n(v_n - u_n)/(u_n + v_n) > 0$ d'après les deux précédente, d'où l'on déduit que (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_nv_n} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) < 0$ d'après la seconde, d'où l'on déduit que (v_n) est décroissante.

En conséquence : $u_0 < u_n < v_n < v_0$, la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 tandis que la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0. Elles sont donc toutes les deux convergente.

Soit a la limite de (u_n) et b celle de (v_n) ; comme n et $n + 1$ tendent simultanément vers $+\infty$, on doit avoir : $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = a$, et : $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = b$. Et donc :
$a = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2u_nv_n/(u_n + v_n) = 2ab/(a + b)$ et $b = \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} = \sqrt{ab}$, on en déduit, en considérant indifféremment l'une ou l'autre de ces deux égalités que : $a = b$. Ces deux suites ont donc la même limite, ce qui en fait des suites adjacentes.

A1.7) Étudier le couple de suites définis par : $0 \leq u_0 \leq v_0 \leq 7$, et : $u_{n+1} = \sqrt{7 - v_n}$, $v_{n+1} = \sqrt{7 + u_n}$. (Montrer que u_n et v_n ont tous leurs termes dans $[0, 7]$ et vérifient $u_n \leq v_n$).

- *Corrigé* : On doit nécessairement avoir $u_n \geq -7$ et $v_n \leq 7$ pour que u_{n+1} et v_{n+1} soient définies. Dans le cas contraire, les deux suites s'arrêtent là, elles sont finies. Mais en fait, ça n'arrive jamais car, par récurrence :

Initialisation : $0 \leq u_0 \leq 7$ et $0 \leq v_0 \leq 7$.
Hypothèse de récurrence : On suppose $0 \leq u_n \leq 7$ et $0 \leq v_n \leq 7$.
Passage au rang suivant : Alors $0 \leq 7 - v_n \leq 7$ et $7 \leq 7 + u_n \leq 14$, d'où : $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{7} < 7$ et $0 < \sqrt{7} \leq v_{n+1} \leq \sqrt{14} < 7$. La propriété est donc vraie à tout rang, les deux suites sont bien infinies.

On a ensuite : $0 \leq u_n + v_n \iff 7 \leq 7 + u_n + v_n \iff 7 - v_n \leq 7 + u_n \iff u_{n+1} = \sqrt{7 - v_n} \leq \sqrt{7 + u_n} = v_{n+1}$ (car on a vu dans la démonstration précédente que $7 - v_n \geq 0$). Et comme cette propriété, dont on vient de démontrer qu'elle est vraie à partir du rang 1, est vraie par hypothèse au rang 0, alors pour tout n : $u_n \leq v_n$. (À noter qu'on a préalablement écrit ces équivalences dans l'autre sens au brouillon).

En outre, en notant $f(x) = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x}}$ alors $u_{n+2} = f(u_n)$, et en notant $g(x) = \sqrt{7 + \sqrt{7 - x}}$ alors $v_{n+2} = g(v_n)$. Ces fonctions définissent donc les suites (u_n) et (v_n), chacune par deux sous-suites des termes pairs et impairs. Et comme elles sont de façon évidente décroissantes sur $[0, 7]$, chacune de ces sous-suites sera elle-même divisée en deux sous-suites monotones. Elles sont monotones bornées par $[0, 7]$; elles sont donc toutes (il y en a huit au total) convergentes vers des points fixes respectifs de f et g.

Curieusement, les deux équations $f(x) = x$ et $g(x) = x$ conduisent à des équations polynomiales voisines :

$f(x) = x \Rightarrow x^4 - 14x^2 - x + 42 = 0$, qui se factorise : $(x - 2)(x + 3)(x^2 - x - 7) = 0$, dont les seule racines appartenant à $[0, 7]$ sont 2 et $(1 + \sqrt{29})/2 \approx 3{,}19$.

$g(x) = x \Rightarrow x^4 - 14x^2 + x + 42 = 0$, qui se factorise : $(x + 2)(x - 3)(x^2 + x - 7) = 0$, dont les seule racines appartenant à $[0, 7]$ sont 3 et $(-1 + \sqrt{29})/2 \approx 2{,}19$.

Mais, comme à partir du rang 1 : $u_n \leq \sqrt{7}$ et $v_n \geq \sqrt{7} \approx 2.64$, les seules solutions possibles sont 2 pour f et 3 pour g, d'où l'on conclut que toutes les sous-suites de (u_n) convergent vers 2 et celles de (v_n) vers 3.

Conclusion : (u_n) converge vers 2 et (v_n) converge vers 3 qui, et c'est une condition nécessaire, vérifient bien les équations initiales : $2 = \sqrt{7 - 3}$ et $3 = \sqrt{7 + 2}$.