

A2) TD : Séries (première partie).

A2.1) Les séries de termes généraux respectifs $\sin(n)$, $E(\sin(n))$ et $E(|\sin(n)|)$ sont-elles convergentes ?

- *Corrigé* : $\sin(n)$ ne converge pas vers 0 ; $E(\sin(n))$ prend une infinité de fois la valeur -1 ; $E(|\sin(n)|)$ est toujours nul. Prouvons ces trois assertions :

$\sin(n)$ n'a pas de limite car, par exemple, les deux sous-suites $\sin(E((2n - 1/2)\pi))$ et $\sin(E(2n+1/2)\pi)$ sont dans des intervalles distincts ; la condition de convergence vers 0 n'étant pas réalisée alors la série diverge. Pour la seconde, on n'additionne que des 0 ou des -1 ; mais il y a une infinité de -1, $E(\sin(E((2n - 1/2)\pi)))$ par exemple ; la série est donc divergente.

Pour la dernière, il faut prouver que $\sin(n)$ ne peut jamais valoir ± 1 , ce qui voudrait dire qu'il existe un entier k tel que $\pi/2 + k\pi$ soit égal à un entier n , mais alors $\pi = 2n/(2k + 1)$ serait rationnel, ce qui est impossible.

À titre indicatif : Il y a la plupart du temps trois entiers entre $2k\pi$ et $(2k + 1)\pi$, ainsi qu'entre $(2k + 1)\pi$ et $(2k + 2)\pi$. Mais il y en a parfois quatre ; par exemple : entre 7π et 8π (22 à 25), ainsi qu'entre 14π et 15π (44 à 47).

A2.2) Déterminer la nature et la somme si elle converge de la série de terme général $u_n = 1/(4n + 1)(4n + 3)$.

- *Corrigé* : Elle converge car équivalente à une série de Riemann convergente. On décompose en éléments simples : $1/(4n + 1)(4n + 3) = (1/(4n + 1) - 1/(4n + 3))/2 = ((-1)^{2p}/(2 \cdot 2p + 1) + (-1)^{2p+1}/(2 \cdot (2p + 1) + 1))/2$ en posant $n = 2p$. Par suite, la série est la somme d'une série alternée : $\sum (-1)^k/(2k + 1)$, on aurait donc pu appliquer le critère spécial des séries alternées pour prouver la convergence.

On peut la calculer, soit en connaissant le développement en série d'arctangente, soit en le retrouvant par l'intégration de $1/(1 + x^2) = \sum (-1)^k x^{2k}$, d'où : $\text{Arctan}(x) = \sum (-1)^k x^{2k+1}/(2k + 1)$; pour $x = 1$: $\sum (-1)^k/(2k + 1)$ vaut $\text{Arctan}(1) = \pi/4$; par suite : $\sum 1/(4n + 1)(4n + 3) = \pi/8$.

A2.3) Déterminer la nature et la somme si elle converge de la série de terme général $u_n = 1/(8n + 1)(8n + 5)$.

- *Corrigé* : En procédant comme à l'exercice précédent, on peut prouver la convergence par équivalence à une série de Riemann convergente, soit avec le critère spécial des séries alternées, où :

$$\sum 1/(8n + 1)(8n + 5) = (\sum (-1)^k/(4k + 1))/4.$$

Il faut cette fois-ci intégrer $1/(1 + x^4)$, qu'il faut décomposer en éléments simples ; on peut pour cela faire les calculs dans l'ensemble des complexes car les racines quatrièmes de -1 sont : $e^{i\pi/4}$, $e^{-i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{-3i\pi/4}$. Il s'en suit que : $x^4 + 1 = (x - e^{i\pi/4})(x - e^{-i\pi/4})(x - e^{3i\pi/4})(x - e^{-3i\pi/4}) = \dots = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

$$1/(1 + x^4) = (ax + b)/(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (cx + d)/(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

On obtient : $a + c = (d - b)\sqrt{2} = 0$, $b + d = (c - a)\sqrt{2} = 1$, d'où : $b = d = 1/2$ et $c = -a = \sqrt{2}/4$. Alors : $1/(1 + x^4) =$

$$(\sqrt{2}/8)(2x + \sqrt{2})/(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - (\sqrt{2}/8)(2x - \sqrt{2})/(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (1/2)/((\sqrt{2}x + 1)^2 + 1) + (1/2)/((\sqrt{2}x - 1)^2 + 1)$$

On obtient $F(x) = (\sqrt{2}/8)(\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)) + (\sqrt{2}/4)(\text{Arctan}(\sqrt{2}x + 1) + \text{Arctan}(\sqrt{2}x - 1))$,

$$\text{avec : } \sum 1/(8n + 1)(8n + 5) = (F(1) - F(0))/4 = (\pi + \ln(3 + 2\sqrt{2}))\sqrt{2}/32.$$

A2.4) Déterminer la nature et la somme si elle converge de la série de terme général $u_n = \sqrt{\ln(n + 1)} - \sqrt{\ln(n)}$.

- *Corrigé* : On la transforme en suite par télescopage : $\sum_{k=1}^n (\sqrt{\ln(k + 1)} - \sqrt{\ln(k)}) = \sqrt{\ln(n + 1)}$; d'où l'on conclut qu'elle diverge vers $+\infty$.

A2.5) Déterminer la nature des séries de termes généraux respectifs :

$$\sin(\pi((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n)), \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n), \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n).$$

Si elles convergent, exprimer la somme de la troisième en fonction de celle de la deuxième.

- *Corrigé* : Avec la formule du binôme de Newton, on montre que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair, d'où l'on conclut que la première série est nulle.

$0 < 2 - \sqrt{3} < 1$; la seconde série est équivalente à une série géométrique convergente, donc elle converge (on peut aussi appliquer le critère de d'Alembert). Appelons a sa somme.

$\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n) = \sin(\pi((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n) - \pi(2 - \sqrt{3})^n) = \sin(2k\pi - \pi(2 - \sqrt{3})^n) = -\sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$; cette dernière série est donc convergente avec pour somme $-a$.

- *Remarque* : Il est curieux que $\sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) = -\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.