

## A3) TD : Séries (deuxième partie).

A3.1) Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = 1 - \cos(1/n)$ .

- *Corrigé* :  $u_n \geq 0$ , et  $u_n \sim 1 - (1 - 1/2n^2) = 1/2n^2$  série de Riemann convergente.

A3.2) Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \ln(1 + (-1)^n \ln(n)/n)$ .

- *Corrigé* : On étudie d'abord la fonction  $f(x) = \ln(x)/x$ , qui est positive sur  $[1, +\infty[$ , admet une limite nulle en l'infini, et est décroissante pour  $x > e$  car  $f'(x) = (1 - \ln(x))/x^2$ .

On a ensuite, le développement limité suivant :  $u_n = (-1)^n \ln(n)/n - \ln^2(n)/2n^2 + o(\ln^2(n)/n^2)$ .

Soit  $v_n = (-1)^n \ln(n)/n$  ; d'après l'étude de  $f$ , elle est positive, admet pour limite 0 et décroît à partir du rang 3. Elle est donc convergente en vertu du critère spécial des séries alternées.

Il est interdit d'utiliser les équivalents avec les séries qui changent de signe une infinité de fois, mais on va s'intéresser ici à la série de terme général  $v_n - u_n = \ln^2(n)/2n^2 + o(\ln^2(n)/n^2)$ . Le terme général de cette série là est donc positif. En outre, comme  $0 \leq \ln(n) \ll n^{1/4}$ , alors :  $0 \leq v_n - u_n \leq 1/2n^{3/2} + o(1/n^{3/2})$  ; d'où l'on déduit que la série de terme général  $v_n - u_n$  converge. Pour conclure on additionne deux séries convergentes :

$$\sum (u_n - v_n) + \sum v_n = \sum u_n, \text{ qui est donc convergente.}$$

*Autre méthode* : On peut tenter d'appliquer le critère spécial des séries alternées car  $|u_n| \sim |(-1)^n \ln(n)/n| \rightarrow 0$  mais est le terme général d'une série divergente, il n'y a donc pas convergence absolue et il vaut mieux éviter les équivalents avec des séries non absolument convergentes. On peut aussi remarquer que  $u_n$  est du signe de  $(-1)^n$  car pour  $n$  pair :  $1 + (-1)^n \ln(n)/n > 1$ , et pour  $n$  impair  $1 + (-1)^n \ln(n)/n \leq 1$  (strictement pour  $n \geq 3$ ) ; on a donc bien affaire à une série alternée dont le terme général tend vers 0, il suffit ensuite de démontrer la décroissance.

Quand  $n$  assez grand :  $|u_{n+1}| - |u_n| = \ln(n+1)/(n+1) - \ln(n)/n + o(\ln(n)/n)$ . Comme la fonction  $f(x) = \ln(x)/x$  est décroissante pour  $x > e$  car  $f'(x) = (1 - \ln(x))/x^2$ , alors  $|u_{n+1}| - |u_n| < 0$  pour  $n$  assez grand (il est important de préciser que  $\ln(n) \ll n$  pour que le petit  $o$  soit négligeable). Il s'en suit que la série converge.

A3.3) Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = (-1)^n / (n + (-1)^n \cdot \sqrt{n+1})$ .

- *Corrigé* : Le problème est que, si la série est bien alternée et que son terme général tend vers 0, elle n'est pas absolument décroissante car il faudrait  $n+1 + (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{n+2} \geq n + (-1)^n \cdot \sqrt{n+1}$ , c'est-à-dire :

$1 \geq (-1)^n (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$ , ce qui est faux pour  $n$  impair. Il faut donc procéder selon la deuxième méthode de l'exercice précédent :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + (-1)^n \cdot \sqrt{n+1}/n} = \frac{(-1)^n}{n} \cdot (1 - (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{n} + o(\frac{\sqrt{n+1}}{n})) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} + o(\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} + o(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

On additionne donc une série alternée convergente, et une série convergente ( $\sqrt{n+1}/n^2 \sim 1/n^{3/2}$ ) (le « petit  $o$  » ne pose pas de problème s'il s'applique au terme général d'une série absolument convergente) ; cette somme est donc convergente. Il est important que le terme d'ordre le plus élevé (celui du petit  $o$ ) soit de signe constant car on rappelle qu'il est déconseillé d'utiliser les équivalents dans le cas contraire. En conséquence de quoi :

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n} \sim -\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}; \text{ ainsi : } \sum (u_n - \frac{(-1)^n}{n}) \text{ et } -\sum \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \text{ sont de même nature (et non égales). Par suite :}$$

$$\sum (u_n - \frac{(-1)^n}{n}) \text{ et } \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ convergent donc leur somme aussi : } \sum (u_n - \frac{(-1)^n}{n}) + \sum \frac{(-1)^n}{n} = \sum u_n.$$

- *Autre méthode* :  $u_{2n-1} + u_{2n} = \frac{-1 - \sqrt{2n} - \sqrt{2n-1}}{(2n-1 - \sqrt{2n})(2n + \sqrt{2n+1})} \sim \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot n^{3/2}}$  qui est le terme général d'une série de Riemann convergente (à une constante multiplicative près). Il s'en suit que  $\sum u_n$  converge.

A3.4) Soit  $(u_n)$  telle que :  $u_0$  réel et  $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$ . Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n$  ?  
 (Pour  $n \geq 3$  :  $0 \leq u_n < 1$  ; trouver une série géométrique majorante de raison  $1/2$ ).

- *Corrigé* : On observe d'abord le comportement des premiers termes ;  $0 \leq u_1 \leq 2$ , donc  $0 \leq u_2 \leq 1 - \cos(2)$  et  $0 \leq u_3 \leq 1 - \cos(1 - \cos(2)) < 1$ . La suite des observations conduit à penser que, pour tout  $n \geq 1$  :  $0 \leq u_n < 1/2^{n-3}$ . Si c'est confirmé, la série sera convergente car majorée par une série géométrique convergente ; on démontre ainsi la propriété par récurrence :

Elle est vraie pour  $n = 1, 2$  et  $3$ , et on la suppose vraie au rang  $n$  quelconque ( $\geq 3$  pour être dans  $[0, 1]$ ) ; alors :

$0 \leq u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \leq 1 - \cos(1/2^{n-3})$  (car la fonction  $1 - \cos(x)$  est croissante sur  $[0, \pi]$ ). Il faut donc étudier la fonction  $f(x) = \cos(x) + x/2 - 1$ , qui doit être positive ici. Sa dérivée  $(-\sin(x) + 1/2)$  est positive sur  $[0, \pi/6]$  et négative sur  $[\pi/6, 1]$ , et comme  $f(0) = 0$  et  $f(1) = \cos(1) - 1/2 > 0$ , il s'en suit que  $f$  est strictement positive sur  $]0, 1]$ , donc :  $1 - \cos(1/2^{n-3}) < 1/2^{n-2}$ .

*Autre méthode* :  $1 - \cos(1/2^{n-3}) = 2.\sin^2(1/2^{n-3}) \leq 2.(1/2^{n-3})^2 = 1/2^{2n-5}$  (car  $\sin(x) \leq x$  pour  $x \geq 0$ ).

A3.5) a) Soit  $(u_n)$  une suite décroissante strictement positive telle que l'on ait :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = a > 0$ . Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n$  en fonction des valeurs de  $a$ .

b) Soit  $(u_n)$  une suite strictement positive telle que l'on ait :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} = a > 0$ , et :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}} = b > 0$ . Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n$  en fonction des valeurs de  $a$  et  $b$ .

- *Corrigé* : a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+2}}{u_n} - a \right| < \varepsilon$ .

On choisit  $\varepsilon$  tel que  $0 < a - \varepsilon$  ; alors :  $(a - \varepsilon)u_n < u_{n+2} < (a + \varepsilon)u_n$ .

On fait ensuite une démonstration similaire à celle du critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned} (a - \varepsilon)u_{N+1} &\leq (a - \varepsilon)u_N < u_{N+2} < (a + \varepsilon)u_N \\ (a - \varepsilon)u_{N+1} &< u_{N+3} < (a + \varepsilon)u_{N+1} \leq (a + \varepsilon)u_N \\ (a - \varepsilon)^2 u_{N+1} &< (a - \varepsilon)u_{N+2} < u_{N+4} < (a + \varepsilon)u_{N+2} < (a + \varepsilon)^2 u_N \\ (a - \varepsilon)^2 u_{N+1} &< (a - \varepsilon)u_{N+3} < u_{N+5} < (a + \varepsilon)u_{N+3} < (a + \varepsilon)^2 u_N \end{aligned}$$

etc..

$$\begin{aligned} (a - \varepsilon)^n u_{N+1} &< u_{N+2n} < (a + \varepsilon)^n u_N \\ (a - \varepsilon)^n u_{N+1} &< u_{N+2n+1} < (a + \varepsilon)^n u_N \end{aligned}$$

Ainsi, la somme :  $S_{N+1} + (1 + (a - \varepsilon) + \dots + (a - \varepsilon)^n)u_{N+1} < \sum_{k=0}^{N+2n+1} u_k < S_{N+1} + (1 + (a + \varepsilon) + \dots + (a + \varepsilon)^n)u_N$ , d'où :

Si  $a < 1$ , on choisit  $\varepsilon$  tel que  $a + \varepsilon < 1$  et alors la série converge.

Si  $a > 1$ , on choisit  $\varepsilon$  tel que  $a - \varepsilon > 1$  et alors la série diverge.

Si  $a = 1$  on ne peut pas conclure.

b)  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} - a \right| < \varepsilon$  et  $\left| \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}} - b \right| < \varepsilon$ .

On choisit  $\varepsilon$  tel que  $0 < a - \varepsilon$  et  $0 < b - \varepsilon$ . Alors, en procédant comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} (1 + (a - \varepsilon) + \dots + (a - \varepsilon)^n)u_{2N} &< \sum_{k=0}^n u_{2N+2k} < (1 + (a + \varepsilon) + \dots + (a + \varepsilon)^n)u_{2N} \\ (1 + (b - \varepsilon) + \dots + (b - \varepsilon)^n)u_{2N+1} &< \sum_{k=0}^n u_{2N+2k+1} < (1 + (b + \varepsilon) + \dots + (b + \varepsilon)^n)u_{2N+1} \end{aligned}$$

Il s'en suit, comme les divergences se font vers  $+\infty$  :

Si  $(a < 1$  et  $b < 1)$  alors  $\sum u_n$  converge, mais si  $(a > 1$  ou  $b > 1)$  alors  $\sum u_n$  diverge vers  $+\infty$ .