A) TD : Suites et Séries.

A1.1) Étudier la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{u_n}}$.

A1.2) Étudier la suite définie par : *a*) $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$; *b*) $u_0 < 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$.

A1.3) Étudier la suite définie par : u_0 donné et $u_{n+1} = a.u_n + b$, où a et b sont des réels donnés (montrer qu'il existe dans certains cas une constante k telle que $v_n = u_n + k$ est une suite géométrique).

A1.4) Soit une suite (u_n) telle que les sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

A1.5) Soit une fonction numérique f dérivable telle que sa dérivée admette une limite finie ou non en $+\infty$. Étudier la suite (u_n) définie par : $u_n = f(n + 1) - f(n)$. (Utiliser le théorème des accroissements finis).

A1.6) Étudier le couple de suites définis par : $0 < u_0 < v_0$, et : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$. (Montrer qu'elles sont adjacentes).

A1.7) Étudier le couple de suites définis par : $0 < u_0 < v_0$, et : $u_{n+1} = 2u_nv_n/(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$. (Montrer qu'elles sont adjacentes).

A1.8) *a*) Étudier la suite (u_n) définie par : $u_n = (\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k})/\sqrt{n}$ (montrer que : $\int_k^{k+1} dt/\sqrt{t} \leq 1/\sqrt{k} \leq \int_{k-1}^{k} dt/\sqrt{t}$).
b) Soit $v_n = \sqrt{n}(u_n - 2)$, et $w_n = v_{n-1} - v_n$; étudier la série de terme général w_n, puis la suite (v_n).

A2.1) Les séries de termes généraux respectifs $\sin(n)$, $E(\sin(n))$ et $E(|\sin(n)|)$ sont-elles convergentes ?

A2.2) Déterminer la nature et la somme si elle converge de la série de terme général $u_n = 1/(4n + 1)(4n + 3)$.

A2.3) Déterminer la nature et la somme si elle converge de la série de terme général $u_n = 1/(8n + 1)(8n + 5)$.

A2.4) Déterminer la nature et la somme si elle converge de la série de terme général $u_n = \sqrt{\ln(n + 1)} - \sqrt{\ln(n)}$.

A2.5) Déterminer la nature des séries de termes généraux respectifs :

$$\sin(\pi((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n)),\ \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n),\ \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n).$$

Si elles convergent, exprimer la somme de la troisième en fonction de celle de la deuxième.

A3.1) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = 1 - \cos(1/n)$.

A3.2) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 + (-1)^n \ln(n)/n)$.

A3.3) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n/(n + (-1)^n.\sqrt{n + 1})$.

A3.4) Soit (u_n) telle que : u_0 réel et $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ? (Pour $n \geq 3$: $0 \leq u_n < 1$; trouver une série géométrique majorante de raison 1/2).

A3.5) *a*) Soit (u_n) une suite décroissante strictement positive telle que l'on ait : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = a > 0$. Étudier la convergence de la série de terme général u_n en fonction des valeurs de a.

b) Soit (u_n) une suite strictement positive telle que l'on ait : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} = a > 0$, et : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}} = b > 0$. Étudier la convergence de la série de terme général u_n en fonction des valeurs de a et b.