

B1) TD : Développements limités.

B1.1) Trouver a et b pour que $(1 + ax^2)/(1 + bx^2)$ soit la meilleure approximation possible de $\cos(x)$ au voisinage de 0 .

- *Corrigé* : Le D.L. en 0 de $(1 + ax^2)/(1 + bx^2) = (1 + ax^2)(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^7)) = 1 + (a - b)x^2 + (b^2 - ab)x^4 + (ab^2 - b^3)x^6 + o(x^7)$; les deux premiers coefficients doivent être égalés à ceux du D.L. du cosinus : $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - x^6/720 + o(x^7)$, ce qui fait deux équations à deux inconnues :

$a - b = -1/2$, $b(b - a) = 1/24$, d'où : $b = 1/12$ et $a = -5/12$. Ainsi :

$$(1 - 5x^2/12)/(1 + x^2/12) = (12 - 5x^2)/(12 + x^2) = \cos(x) - x^6/480 + o(x^7).$$

- *Autre méthode* : La division par puissances croissantes.

B1.2) Donner le premier terme non nul du développement limité en 0 de : $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x))$.

- *Corrigé* : $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x)) = \tan(x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040 + o(x^8)) - \sin(x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + o(x^8))$
 $= [x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040] + [x - x^3/6 + x^5/120]^3/3 + 2[x - x^3/6]^5/15 + 17[x]^7/315$
 $- [x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315] + [x + x^3/3 + 2x^5/15]^3/6 - [x + x^3/3]^5/120 + [x]^7/5040 + o(x^8) = x^7/30 + o(x^8)$.

B1.3) Soit les fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^{1/x}$ (si $x \neq 0$), $f(0) = 0$; $g(x) = x^{-x}$ (si $x \neq 0$), $g(0) = 1$. Calculer leurs limites en $+\infty$, étudier leur continuité et leur dérivabilité en 0 . Donner s'il existe, un développement limité de f et g d'ordre 1 au voisinage de 0 . Montrer que, pour $x \neq 0$: $g(x) = f(1/x)$.

- *Corrigé* : $f(x) = e^{\ln(x)/x}$, donc : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$; $g(x) = e^{-x \cdot \ln(x)}$, donc : $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, donc f n'est ni continue ni dérivable en 0 ; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$, donc g est continue en 0 .

$\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - 1)/x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \ln^2(x)/2 + o(x^2 \cdot \ln^2(x)) - 1)/x = \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln(x) + x \cdot \ln^2(x)/2 + o(x \cdot \ln^2(x))) = +\infty$; g n'est donc pas dérivable en 0 . (On peut aussi écrire $-\ln(x) \cdot (e^{-x \cdot \ln(x)} - 1)/(x \cdot \ln(x))$).

Faire un DL de f n'a pas beaucoup de sens. Pour g : $g(x) = 1 - x \cdot \ln(x) + o(x \cdot \ln(x))$, mais ce n'est pas un vrai DL ; en fait, il existe un DL de g à l'ordre 0 mais pas à l'ordre 1 car sa dérivée n'est pas bornée au voisinage de 0 .

Pour $x \neq 0$: $f(1/x) = (1/x)^x = x^{-x} = g(x)$.

B1.4) Soit les deux réels $a > 0$ et $\alpha > 1$, et soit f continue de $]0, +\infty[$ dans l'ensemble des réels telle qu'au voisinage de 0 : $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$. Trouver $M > 0$ tel que : $f(]0, M[) \subset]0, M[$. Montrer que la suite définie par $u_0 \in]0, M[$ assez petit, et $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers 0 . En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}) = (\alpha - 1)a$.

- *Corrigé* : $f(x) - x + ax^\alpha = o(x^\alpha)$, donc : $(f(x) - x)/x^\alpha + a = o(1)$, d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x| < \eta \Rightarrow |(f(x) - x)/x^\alpha + a| < \varepsilon.$$

Ainsi : $x - (a + \varepsilon)x^\alpha < f(x) < x - (a - \varepsilon)x^\alpha$.

On choisit $\varepsilon = a/2$; alors : $x - (3a/2)x^\alpha < f(x) < x - (a/2)x^\alpha < x < \eta$ (car $(a/2)x^\alpha > 0$).

Il suffit ensuite d'avoir $0 \leq x - (3a/2)x^\alpha$, c'est-à-dire : $x \leq (3a/2)^{1/(\alpha-1)}$.

En conclusion, pour $M = \inf\{\eta, (3a/2)^{1/(\alpha-1)}\}$, $x \in]0, M[\Rightarrow f(x) \in]0, M[$, donc : $f(]0, M[) \subset]0, M[$.

Soit $u_0 \in]0, M[$; on montre alors par récurrence que $(u_n) \subset]0, M[$.

Comme $f(x) < x$, alors : $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante, minorée par 0 donc convergente vers une limite ℓ , avec $0 \leq \ell \leq u_0$ (car (u_n) décroît) ; et comme f est continue, si $\ell > 0$, on a alors : $f(\ell) = \ell$.

Comme f est continue : $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = f(\ell)$, ce qui est impossible car $f(\ell) < \ell$. Il en résulte que $\ell = 0$.

Donc, pour n assez grand : $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - au_n^\alpha + o(u_n^\alpha) = u_n(1 - au_n^{\alpha-1} + o(u_n^{\alpha-1}))$. Par suite :

$u_{n+1}^{1-\alpha} = u_n^{1-\alpha}(1 - au_n^{\alpha-1} + o(u_n^{\alpha-1}))^{1-\alpha} = u_n^{1-\alpha}(1 - (1-\alpha)au_n^{\alpha-1} + o(u_n^{\alpha-1})) = u_n^{1-\alpha} + (\alpha-1)a + o(1)$, ce qui fait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}) = (\alpha - 1)a.$$