B2) TD : Séries entières (première partie).

B2.1) Soit $f(z) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}.\frac{z^n}{n}$ (si $x \in \mathbb{R}$ et $-1 < x \leq 1$, alors $f(x) = \ln(1+x)$). Montrer que la série $f(i)$ converge et calculer sa somme. Sachant que $1 + i = \sqrt{2}.e^{i\pi/4}$, le résultat est-il conforme à ce qu'on pouvait souhaiter ?

- *Corrigé* : $\sum_1^\infty (-1)^{n+1}.\frac{i^n}{n} = \sum_{n \text{ pair}} (-1)^{n+1}.\frac{i^n}{n} + \sum_{n \text{ impair}} (-1)^{n+1}.\frac{i^n}{n} = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}.\frac{1}{2n} + \sum_0^\infty (-1)^n.\frac{i}{2n+1} = \frac{1}{2}.\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} + i.\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} =$

$\frac{1}{2}.\ln(2) + i.\text{Arctan}(1) = \frac{1}{2}.\ln(2) + i.\frac{\pi}{4}$.

On aurait bien : $\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}.e^{i\pi/4}) = \frac{1}{2}.\ln(2) + i.\frac{\pi}{4}$. Mais attention : $\sqrt{2}.e^{i\pi/4} = \sqrt{2}.e^{9i\pi/4}$; il est nécessaire de définir pour ce type de logarithme ce qu'on appelle : une détermination, à savoir un intervalle fixé de largeur 2π dans lequel on choisira exclusivement les représentations des angles.

B.2.2) Donner l'expression analytique (qu'on peut obtenir avec une intégration par parties), puis le développement en série entière de $F(x)$, la primitive de $f(x) = \ln(1+x)$ qui s'annule pour $x = 0$. Montrer que cette série entière converge sur $[-1, 1]$. (La primitive de f converge donc sur un ensemble plus grand que f).

- *Corrigé* : $\ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}.\frac{x^n}{n}$ pour $x \in]-1, 1]$; on en déduit : $F(x) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}.\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + k$, où k est tel que $F(0) = 0$, à savoir ici : $k = 0$.

- *Autre méthode* : On connaît l'expression analytique de la primitive de $\ln(1+x)$: $F(x) = (1+x).\ln(1+x) - x$; il suffit donc de calculer : $(1+x).\sum_1^\infty (-1)^{n+1}.\frac{x^n}{n} - x$. On retrouve évidemment le même résultat.

La convergence sur $]-1, 1]$ est acquise, il faut donc étudier la convergence en -1 : $F(-1) = \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ qui converge bien comme étant de même nature qu'une série de Riemann convergente. On peut même la calculer avec un télescopage, bien que ça soit inutile car la convergence de la série suffit à assurer la continuité de la fonction :

$F(-1) = \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \sum_1^\infty (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1$, valeur conforme au prolongement par continuité de $(1+x).\ln(1+x) - x$.

B2.3) Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle de terme général $a_n x^n$ sachant que les trois suites (a_{3n+1}/a_{3n}), (a_{3n+2}/a_{3n+1}) et (a_{3n+3}/a_{3n+2}) convergent vers les trois limites strictement positives respectives : α_1, α_2, α_3.

- *Corrigé* : On sait que $\sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty a_{3n} x^{3n} + \sum_0^\infty a_{3n+1} x^{3n+1} + \sum_0^\infty a_{3n+2} x^{3n+2}$, quand toutes ces séries convergent.

On les transforme en séries numériques pour pouvoir appliquer le critère de d'Alembert, car ce sont des séries lacunaires :

Pour $u_n = a_{3n} x^{3n}$, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{3n+3}}{a_{3n}}\right|.|x|^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{3n+3}}{a_{3n+2}}.\frac{a_{3n+2}}{a_{3n+1}}.\frac{a_{3n+1}}{a_{3n}}.|x|^3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3.|x|^3$. Pour qu'il y ait convergence il suffit que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3.|x|^3 < 1$, donc : $|x| < (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{-1/3}$.

Pour $v_n = a_{3n+1} x^{3n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{3n+4}}{a_{3n+1}}\right|.|x|^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{3(n+1)+1}}{a_{3(n+1)}}.\frac{a_{3n+3}}{a_{3n+2}}.\frac{a_{3n+2}}{a_{3n+1}}.|x|^3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3.|x|^3$. Pour qu'il y ait convergence il suffit encore que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3.|x|^3 < 1$, donc : $|x| < (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{-1/3}$.

Pour $w_n = a_{3n+2} x^{3n+2}$, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{3n+5}}{a_{3n+2}}\right|.|x|^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{3(n+1)+2}}{a_{3(n+1)+1}}.\frac{a_{3n+4}}{a_{3n+3}}.\frac{a_{3n+3}}{a_{3n+2}}.|x|^3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3.|x|^3$. Pour qu'il y ait convergence il suffit une nouvelle fois que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3.|x|^3 < 1$, donc : $|x| < (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{-1/3}$.

Ainsi, la série $\sum_0^\infty a_n x^n$ converge quand $|x^3| < \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$; son rayon de convergence est donc : $\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/3}}$.

B2.4) Donner le rayon de convergence R et étudier la convergence aux bornes de : $f(x) = \sum_1^\infty x^n/(n.(1 + 2^n))$.
Montrer que pour $x \in [0, R[$, $0 \le f(x) \le -\ln(1 - x/2)$.

- *Corrigé* : On applique le critère de d'Alembert : $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2$.

Pour $x = -2$: La série de terme général $(-1)^n \frac{2^n}{n(1 + 2^n)}$ vérifie le critère spécial des séries alternées (pour la décroissance on procède par équivalences à partir de $u_{n+1} \le u_n$, et on arrive à : $n - 1 \le 2^n$), elle converge donc.

Pour $x = 2$: La série de terme général $\frac{2^n}{n(1 + 2^n)}$ est de même nature que la série harmonique, elle diverge donc.
Ainsi, f est définie sur $[-2, 2[$.
Soit $x \in [0, 2[$; il est évident que $f(x) \ge 0$ car la série est à termes positifs. Par ailleurs :

$$0 \le f(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n.(1 + 2^n)} \le \sum_1^\infty \frac{x^n}{n.2^n} = \sum_1^\infty \frac{(x/2)^n}{n} = -\ln(1 - x/2).$$

B2.5) Donner le rayon de convergence de : $\sum_0^\infty n!z^{n^2}$, puis de : $\sum_0^\infty e^n z^{n^3}$.

- *Corrigé* : Ce sont des séries lacunaires, on ne peut donc pas appliquer directement le critère de d'Alembert. Le théorème *utile* nous indique que $R \le 1$; on peut donc tenter de prouver qu'il vaut 1.

Soit un réel r tel que $0 \le r < 1$; soit alors : $\sum_0^\infty n!r^{n^2}$, où l'on applique le critère de d'Alembert avec $u_n = n!r^{n^2}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n + 1).r^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{(\ln(r)).(2n + 1)(1 + \ln(n + 1)/\ln(r)(2n + 1))} = 0$ car $\ln(r) < 0$.

Il s'en suit que : $R = \sup\{r \ge 0, \sum_0^\infty |a_n|r^n \text{ converge}\} = \sup [0, 1[= 1$.

De même pour la seconde pour $v_n = e^n r^{n^3}$:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} r^{(n+1)^3}}{e^n r^{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} e r^{3n^2+3n+1} = 0$. La série numérique converge donc, ce qui implique que le rayon de convergence de la série entière vaut effectivement 1.