

B3) TD : Séries entières (deuxième partie).

B3.1) Donner le rayon de convergence et calculer : $\sum_0^{\infty} x^n / (n^2 + 4n + 3)$.

- *Corrigé* : On calcule le rayon de convergence avec le critère de d'Alembert : $R = 1$. En outre, pour $x = 1$, cette série étant de même nature qu'une série de Riemann convergente, elle converge sur $[-1, 1]$.

On applique ensuite la décomposition en éléments simple, peu importe la méthode utilisée ;

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3} = \dots = \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+3}. \text{ D'où, pour } x \neq 0 :$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n+1} - \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n+3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^{-1} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x^{-3} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^{-1} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} - x^{-3} \cdot \left(\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(x^{-1} \cdot (-\ln(1-x)) - x^{-3} \cdot \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cdot \ln(1-x) + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} \right) = \frac{1}{2x^3} \cdot \left((1-x^2) \cdot \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right).$$

Il reste une question : Peut-on prolonger cette expression par continuité en 0, sachant que $f(0) = \frac{1}{3}$?

Comme $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, alors : $\frac{1}{2x^3} \cdot \left((1-x^2) \cdot \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right) = \dots = \frac{1}{3} + o(1)$.

La réponse est donc oui, et on pouvait s'y attendre car la convergence de la série suffit à assurer la continuité de la fonction.

B3.2) Montrer que si $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence fini non nul, alors $\sum_0^{\infty} a_n z^n / n!$ a un rayon de convergence infini.

- *Corrigé* : Le problème est qu'ici, on ne peut pas appliquer le calcul du rayon par le critère de d'Alembert car on ignore si certains a_n sont nuls ou non (série lacunaire). Donc, par exemple, soit r tel que $0 < r < R$; il s'en suit

que $(|a_n| r^n)$ est bornée, elle admet donc un majorant M . Par suite : $\frac{|a_n z^n|}{n!} \leq \frac{|a_n r^n|}{n!} \cdot |z/r|^n \leq \frac{M}{n!} \cdot |z/r|^n$, d'où :

$\sum_0^{\infty} \frac{|a_n z^n|}{n!} \leq \sum_0^{\infty} \frac{M}{n!} \cdot |z/r|^n = M \cdot e^{|z/r|}$. La série $\sum_0^{\infty} a_n z^n / n!$ est donc absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$; son rayon de convergence est donc infini.

B3.3) Développer en série entière, si c'est possible : $f(z) = (1+z)^2 / (1-z)^2$.

- *Corrigé* : Le rayon de convergence vaut 1 car on multiplie la dérivée de $1/(1-z)$ par un polynôme.

$$(1/(1-z))' = 1/(1-z)^2, \text{ donc : } 1/(1-z)^2 = \sum_0^{\infty} (n+1)z^n, \text{ et ainsi : } f(z) = (1+2z+z^2) \cdot \sum_0^{\infty} (n+1)z^n =$$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} (n+1)z^n + 2 \cdot \sum_0^{\infty} (n+1)z^{n+1} + \sum_0^{\infty} (n+1)z^{n+2} = \sum_0^{\infty} (n+1)z^n + \sum_1^{\infty} 2n \cdot z^n + \sum_2^{\infty} (n-1)z^n =$$

$$f(z) = [1 + 2z + \sum_2^{\infty} (n+1)z^n] + [2z + \sum_2^{\infty} 2n \cdot z^n] + [\sum_2^{\infty} (n-1)z^n] = 1 + 4z + \sum_2^{\infty} 4n \cdot z^n = 1 + \sum_1^{\infty} 4n \cdot z^n.$$

B3.4) Résoudre dans l'ensemble des complexes : $\cos(z) + \sin(z) = 2$.

- *Corrigé* : Avec les formules d'Euler : $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (1-i) \cdot e^{2iz} - 4 \cdot e^{iz} + 1 + i = 0$.

C'est une équation du second degré de discriminant $\Delta/4 = 2$, d'où : $e^{iz} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{1-i} = \dots = (\sqrt{2} \pm 1) \cdot e^{i\pi/4}$.

$e^{iz} = e^{-y} \cdot e^{ix} = (\sqrt{2} \pm 1) \cdot e^{i\pi/4}$, et finalement : $z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi + i \cdot \ln(\sqrt{2} \pm 1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

B3.5) Soit $f(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$ avec $a_n = \sum_{k=1}^n 1/k$, donner son rayon de convergence. Calculer $a_n - a_{n-1}$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

- *Corrigé* : Avec d'Alembert, $a_n/a_{n+1} = 1 - 1/(n+1)(1 + 1/2 + \dots + 1/n)$; le rayon de convergence est donc 1.

$a_n - a_{n-1} = 1/n$, d'où, en posant arbitrairement $a_0 = 0$: $\sum_1^\infty a_n x^n - \sum_1^\infty a_{n-1} x^n = \sum_1^\infty x^n/n = -\ln(1-x)$. Et comme, par ailleurs : $\sum_1^\infty a_{n-1} x^n = x \cdot \sum_1^\infty a_{n-1} x^{n-1} = x \cdot \sum_1^\infty a_n x^n = x \cdot f(x)$, alors $(1-x) \cdot f(x) = -\ln(1-x)$, et donc : $f(x) = \ln(1-x)/(x-1)$ sur $] -1, 1[$; il est en outre simple de montrer que la série diverge grossièrement pour $x = \pm 1$.

B3.6) Développer en série entière, si c'est possible : $f(x) = e^x \cdot \sin^2(x)$.

- *Corrigé* : Le rayon de convergence sera infini car on multiplie des séries de rayons de convergence infinis.

$$e^x \cdot \sin^2(x) = e^x \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot (2 - e^{2ix} - e^{-2ix}) = \frac{1}{2} \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{(1+2i)x} - \frac{1}{4} \cdot e^{(1-2i)x} = \frac{1}{2} \cdot \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{4} \cdot \sum_0^\infty \frac{((1+2i)^n + (1-2i)^n) x^n}{n!}$$

On serait tenté d'utiliser la formule du binôme, mais il y a plus simple : $(1+2i)^n = 5^{n/2} \cdot e^{in \cdot \text{Arctan}(2)}$, d'où :

$$(1+2i)^n + (1-2i)^n = 5^{n/2} (e^{in \cdot \text{Arctan}(2)} + e^{-in \cdot \text{Arctan}(2)}) = 2 \cdot 5^{n/2} \cdot \cos(n \cdot \text{Arctan}(2)), \text{ et ainsi :}$$

$$e^x \cdot \sin^2(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_0^\infty \frac{(1 - 5^{n/2} \cdot \cos(n \cdot \text{Arctan}(2))) x^n}{n!}$$

B3.7) Soit la fonction f définie sur \mathbb{C} par : $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$.

1) Montrer qu'il existe un intervalle réel sur lequel elle est développable en série entière (et un disque de \mathbb{C} ?).

2) Donner la série entière de f en utilisant : a) $1+z+z^2 = (j-z)(j^2-z)$ (où $j = e^{2i\pi/3}$) ; b) Une méthode plus rapide.

- *Corrigé* : 1) Rappel du cours :

Définition : Une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement s'il existe un intervalle I contenant 0 et au moins un autre réel non nul, ainsi qu'une suite de réels (a_n) tels que pour tout élément x de I : $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$.

Théorème : La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si on a les deux conditions suivantes :

$\exists R > 0$ tel que f est de classe C^∞ sur $I =]-R, R[$, et :

$\forall x \in I$, la suite $(u_n(x))$ définie par $u_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ converge vers 0.

Il s'agit en fait de la composée d'une fonction développable en série entière connue : $\phi(u) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1+u^2}$, et d'une

fonction affine : $u(z) = \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$. Sachant que ϕ admet un DSE : $\phi(u) = \sum_0^\infty a_n u^n$, alors :

$f(x) = \phi(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) = \sum_0^\infty a_n (\frac{2z+1}{\sqrt{3}})^n = \sum_0^\infty 3^{-n/2} a_n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^k z^k$ qui peut devenir un DSE par certains procédés de calcul un peu compliqués (la propriété citée dans le cours n'est pas officiellement au programme).

Le mieux est d'en revenir au théorème :

Il est clair que ϕ étant de classe C^∞ , il en est de même de $f = \phi \circ u$; avec en outre, comme $u'' = 0$:

$$f^{(n+1)} = (\phi \circ u)^{(n+1)} = (u')^{n+1} \cdot \phi^{(n+1)}(u) = (2/\sqrt{3})^{n+1} \cdot \phi^{(n+1)}(u)$$

On peut alors montrer que le reste intégral tend vers 0 ; ce reste vaut, en posant $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ et $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt = \dots = \int_{1/\sqrt{3}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - u)^n}{n!} \cdot \phi^{(n+1)}(u) du \leq \int_0^y \frac{(y-u)^n}{n!} \cdot \phi^{(n+1)}(u) du,$$

dont on sait qu'il existe un ouvert centré en 0 dans lequel ce dernier reste tend bien vers 0 : Comme il est nécessaire que $|y| < 1$, alors $|\frac{2x+1}{\sqrt{3}}| \leq \frac{2|x|+1}{\sqrt{3}}$, d'où : $|x| < (\sqrt{3}-1)/2$ convient.

En ce qui concerne un disque complexe, ces définitions s'appliquent a priori dans l'ensemble des réels, mais rien n'empêche de définir une fonction développable en série entière sur un disque complexe, comme une fonction développable en série entière sur l'intervalle réel contenu dans ce disque, à condition que la série obtenue converge vers f dans tout le disque, ce qui est bien le cas ici.

- *Plus simple* : Comme la série de $1/(1+X^2)$ converge pour $|X| < 1$, alors la série de $1/(1 + \frac{2x+1}{\sqrt{3}})$ converge pour $|\frac{2x+1}{\sqrt{3}}| < 1$.

À noter : On va trouver un meilleur rayon à la question 2b).

$$2) a) \frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1}{(j-z)(j^2-z)} = \frac{a}{j-z} + \frac{b}{j^2-z} = \dots = \frac{1}{j^2-j} \frac{1}{j-z} + \frac{1}{j-j^2} \frac{1}{j^2-z} = \frac{1}{1-j^2} \frac{1}{1-jz} + \frac{1}{1-j} \frac{1}{1-jz} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (e^{-i\pi/6} \cdot \frac{1}{1-jz} + e^{i\pi/6} \cdot \frac{1}{1-jz}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sum_0^\infty (e^{-i\pi/6} \cdot j^{2n} + e^{i\pi/6} \cdot j^n) z^n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sum_0^\infty (e^{-i\pi/6} \cdot e^{-2in\pi/3} + e^{i\pi/6} \cdot e^{2in\pi/3}) z^n =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sum_0^\infty (e^{-2in\pi/3-i\pi/6} + e^{2in\pi/3+i\pi/6}) z^n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sum_0^\infty \cos\left(\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) z^n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sum_0^\infty \cos\left(\frac{(4n+1)\pi}{6}\right) z^n.$$

b) On peut penser à poser $Z = z + z^2$ et à écrire : $\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_0^\infty (-1)^n (z+z^2)^n$, en utilisant ensuite le binôme de Newton, mais ça devient compliqué. De même en posant $1+z+z^2 = \frac{3}{4} \cdot (1 + (\frac{2z+1}{\sqrt{3}})^2)$. Il y a plus simple :

$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1-z}{1-z^3} = (1-z) \cdot \sum_0^\infty z^{3n} = \sum_0^\infty z^{3n} - \sum_0^\infty z^{3n+1}$; mais ce n'est pas encore un DSE (sous cette forme on voit qu'un rayon de convergence de 1 convient, ce qui est mieux que ce qu'on a trouvé à la question précédente), que voici :

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_0^\infty a_n z^n \text{ avec } \{a_{3p} = 1, a_{3p+1} = -1, a_{3p+2} = 0\}. \text{ Par exemple : } \frac{1}{1+z+z^2} = \sum_0^\infty \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) z^n.$$

(C'est la même que la précédente car : $\cos(\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{2n\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})$).