C1) TD : Espaces vectoriels (première partie).

C1.1) Soit F l'ensemble des applications dérivables de $E = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle réel contenant 0. Montrer que c'est un espace vectoriel. Soit U le sous-ensemble de E constitué des éléments f de F tels que : $f(0) = f'(0) = 0$; montrer que c'est un sous-espace vectoriel. Peut-on en donner un supplémentaire dans F ?

- *Corrigé* : On peut vérifier tous les axiomes : $(F, +)$ est un groupe commutatif, et les quatre axiomes de la loi externe : (i) : $1.u = u$; (ii) : $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$; (iii) : $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$; (iv) : $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$.

Sinon, on vérifie que c'est un sous-espace vectoriel de E : F est non vide car il contient l'application nulle, et il est stable par combinaison linéaire.

U est non vide car il contient l'application nulle, et il est stable par combinaison linéaire (pour tout couple de scalaires (α, β) et tout couple de vecteurs (f, g) : $(\alpha.f + \beta.g)(0) = (\alpha.f' + \beta.g')(0) = 0$), c'est donc un sous-espace vectoriel, à la fois de E et de F.

L'ensemble A des fonctions affines est un supplémentaire de U dans F car toute fonction f est de la forme :

$f(x) = g(x) + (ax + b)$ où : $a = f'(0)$, $b = f(0)$ et $g(x) = f(x) - ax - b \in U$,

Et la seule fonction affine ϕ telle que $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ est bien la fonction nulle.

C1.2) Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

- *Corrigé* : D'une part, la seule fonction à la fois paire et impaire est l'application nulle ($f(-x) = f(x) = -f(x)$). Ensuite, il faut décomposer toute fonction f en somme d'une fonction paire ϕ et d'une fonction impaire ψ ; alors : $\phi(x) = \frac{1}{2}.(f(x) + f(-x))$ et $\psi(x) = \frac{1}{2}.(f(x) - f(-x))$. On peut les obtenir en inversant le système :

$$\{f(x) = \phi(x) + \psi(x),\ f(-x) = \phi(x) - \psi(x)\}.$$

C1.3) Si E est un espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2, montrer que si U et V sont des hyperplans de E distincts, alors $U + V = E$. Quelle est la dimension de $U \cap V$?

- *Corrigé* : Soit $\dim(E) = n \geq 2$; U et V sont donc de dimensions $n - 1$. On applique la formule de Grassman (~ formule de Poincaré dans les ensembles) : $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U\cap V)$, donc :

$n \geq \dim(U + V) = 2n - 2 - \dim(U\cap V) \Rightarrow n - 2 \leq \dim(U\cap V) \leq \dim(U) = n - 1$.

Si $\dim(U\cap V) = n - 1$, alors $U\cap V = U = V$; comme c'est exclu par hypothèse, alors $\dim(U\cap V) = n - 2$.

Par suite : $\dim(U + V) = 2n - 2 - (n - 2) = n$, et ainsi : $U + V = E$.

- *Autre démonstration* : Comme $U \neq V$, il existe un vecteur u qui est dans V et pas dans U (donc $u \neq 0_E$) ; alors : $U \subsetneq U+\mathrm{Vect}\{u\}$, donc : $n - 1 = \dim(U) < \dim(U+\mathrm{Vect}\{u\})$; ainsi : $\dim(U+\mathrm{Vect}\{u\}) = n$ et $U+\mathrm{Vect}\{u\} = E$.

Finalement : $U + V = E$. Avec la formule de Grassman, on trouve ensuite $\dim(U\cap V) = n - 2$.

- *On peut aussi utiliser une base de U* : $A = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$; comme A est libre, si $A\cup\{u\}$ est liée alors, selon un théorème du cours : $u \in \mathrm{Vect}(A)$, ce qui est exclu car ça voudrait dire $u \in U$. Par suite $A\cup\{u\}$, qui est une famille libre de n vecteurs, est une base de E, donc : $U+V = \mathrm{Vect}(A\cup\{u\}) = E$.

C1.4) Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $F = \{f \in E,\ f(x) = a.\cos(x) + b.\sin(x) + c$, où a, b et c sont des réels$\}$. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie. Soit ϕ et ψ des applications de F dans E définies par :

$$\phi(P) = Q \text{ avec } Q(x) = P(x - \pi/2)\ ;\ \psi(P) = R \text{ avec } R(x) = P'(x).$$

Montrer que ce sont des endomorphismes de F ; comparer $\phi\circ\psi$ et $\psi\circ\phi$.

- *Corrigé* : On peut montrer que F est non vide car il contient la fonction nulle, et qu'il est stable par combinaison linéaire. La partie $A = \{(x \mapsto \cos(x), (x \mapsto \sin(x)), (x \mapsto 1))\}$ est de façon évidente une partie génératrice, F est donc de dimension finie (si on montre que la partie est libre, alors : $\dim(F) = 3$).

- *Plus rapide* : Comme $F = \mathrm{Vect}(A)$ alors c'est un sous-espace vectoriel tel que $\dim(F) \leq \mathrm{Card}(A)$.

Étant donné un élément P quelconque de F, il faut d'abord montrer que $\phi(P)$ et $\psi(P)$ sont des éléments de F :

$\phi((x \mapsto a.\cos(x) + b.\sin(x) + c)) = (x \mapsto a.\cos(x - \pi/2) + b.\sin(x - \pi/2) + c) = (x \mapsto (-b).\cos(x) + a.\sin(x) + c)$ qui est bien dans F.

$\psi((x \mapsto a.\cos(x) + b.\sin(x) + c)) = (x \mapsto a.(-\sin(x)) + b.\cos(x)) = (x \mapsto b.\cos(x) + (-a).\sin(x))$ qui est aussi dans F.

Il faut ensuite vérifier leur linéarité, qui est triviale pour la dérivation ; on ne doit donc s'intéresser qu'à ϕ, en remarquant que : $\alpha_1.(x \mapsto a_1.\cos(x) + b_1.\sin(x) + c_1) + \alpha_2.(x \mapsto a_2.\cos(x) + b_2.\sin(x) + c_2) =$

$(x \mapsto (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2).\cos(x) + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2).\sin(x) + (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2))$; la suite est immédiate.

$\phi\circ\psi((x \mapsto a.\cos(x) + b.\sin(x) + c)) = \phi((x \mapsto b.\cos(x) + (-a).\sin(x))) = (x \mapsto a.\cos(x) + b.\sin(x))$.

$\psi\circ\phi((x \mapsto a.\cos(x) + b.\sin(x) + c)) = \psi((x \mapsto (-b).\cos(x) + a.\sin(x) + c)) = (x \mapsto a.\cos(x) + b.\sin(x))$.

On en déduit que ϕ et ψ commutent.

- *Autre façon de rédiger* : $P'(x - \pi/2)$ $\phi(\psi(P)) = \phi(P') = S$ tel que $S(x) = P'(x - \pi/2)$;

$\psi\circ\phi(P) = \psi(\phi(P)) = \psi(Q) = Q'$, avec $Q'(x) = P'(x - \pi/2)$, donc $\phi\circ\psi = \psi\circ\phi$.

C1.5) Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $E_n = \mathbb{K}_n[X]$ (n entier naturel non nul fixé), et soit B un polynôme non nul de E ; montrer que l'ensemble F des polynômes P tels que $B|P$ (B divise P) est un sous-espace vectoriel de E. Trouver un supplémentaire F' de $F \cap E_n$ dans E_n, et donner $\dim(F')$. (Distinguer les cas où $d°(P) > n$ et $d°(P) \leq n$, puis utiliser la division euclidienne).

- *Corrigé* : F est non vide car tous les polynômes divisent le polynôme nul qui est donc dans F (P aussi est dans F) ; F est stable par combinaison linéaire car si $B|P_1$ et $B|P_2$, alors $B|(\alpha_1.P_1 + \alpha_2.P_2)$.

On peut aussi écrire : $F = \{BQ, Q \in E\}$, et alors $P_1 \in F$ s'il existe Q_1 tel que $P_1 = BQ_1$, et de même $P_2 \in F$ s'il existe Q_2 tel que $P_2 = BQ_2$; alors : $\alpha_1.P_1 + \alpha_2.P_2 = B(\alpha_1.Q_1 + \alpha_2.Q_2) \in F$.

Étant donné un polynôme quelconque A de E_n, on lui applique la division euclidienne par B ; il existe donc des polynômes uniques (à une constante multiplicative près) Q et R tels que : $d°(R) < d°(B)$ et $A = BQ + R$. Par suite, $P = A - R = BQ$ est un élément de F ; donc : $Q = P + R$ où $P \in F$ et $d°(R) < d°(P)$. Ainsi, en posant :

$m = d°(P) - 1$, alors $R \in E_m$. Il y a alors deux cas possibles :

- Si $d°(B) > n$, alors $F \cap E_n = \{0_E\}$, donc $F' = E_n$.
- Si $d°(B) \leq n$, alors $E_m \subset E_n$, et $F' = E_m$ convient.

- *Dans les deux cas* : $F' = E_{\inf\{m, n\}}$.