

C2) TD : Espaces vectoriels (deuxième partie).

C2.1) Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et un scalaire λ tel que, pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(f - \lambda \text{id}_E)$ soit linéaire ; montrer qu'alors f est linéaire.

- *Corrigé* : $(f - \lambda \text{id}_E)(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.(f - \lambda \text{id}_E)(u) + \beta.(f - \lambda \text{id}_E)(v)$; en développant selon la définition des opérations sur les applications :

$$(f - \lambda \text{id}_E)(\alpha.u + \beta.v) = f(\alpha.u + \beta.v) - \lambda \text{id}_E(\alpha.u + \beta.v) = f(\alpha.u + \beta.v) - \lambda(\alpha.u + \beta.v).$$

$$\alpha.(f - \lambda \text{id}_E)(u) + \beta.(f - \lambda \text{id}_E)(v) = \alpha.f(u) - \alpha.\lambda \text{id}_E(u) + \beta.f(v) - \beta.\lambda \text{id}_E(v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v) - \alpha.\lambda.u - \beta.\lambda.v.$$

En soustrayant les deux : $f(\alpha.u + \beta.v) - \alpha.f(u) - \beta.f(v) = 0_E$, d'où :

$$f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v).$$

C2.2) Soit E un espace de dimension 3, et f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que f^3 est l'application nulle, mais f^2 en est distinct. Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $B = (u, f(u), f^2(u))$ soit une base de E . Donner la matrice de f dans cette base. Généraliser ce résultat à $\dim(E) = n$, puis montrer que si f est nilpotent d'ordre p alors $p \leq n$.

- *Corrigé* : On dit que f est nilpotent d'ordre 3. Comme $f^2 \neq 0$, alors il existe u tel que $f^2(u) \neq 0_E$. Soit alors une combinaison linéaire : $a.u + b.f(u) + c.f^2(u) = 0_E$; on lui applique f^2 : $a.f^2(u) = 0_E$ donc $a = 0$. Il reste : $b.f(u) + c.f^2(u) = 0_E$; on lui applique f : $b.f^2(u) = 0_E$ donc $b = 0$. Il reste :

$c.f^2(u) = 0_E$; donc $c = 0$. Il s'en suit que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ est libre, et comme $\dim(E) = 3$, c'est une base.

Soit M la matrice de f dans cette base : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On procède de même en dimension n , avec l'hypothèse f nilpotent d'ordre n , en appliquant successivement $f^{n-1}, f^{n-2}, \dots, f$ à la combinaison linéaire, d'où, si $f^{n-1}(u) \neq 0_E$: $(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ est une base. La matrice de f est alors du même type que celle qui a été obtenue en dimension 3.

Si f est nilpotent d'ordre p et u tel que $f^{p-1}(u) \neq 0_E$, alors, par le même procédé : $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est une famille libre ; ce n'est possible que si $p \leq n$.

C2.3) Soit p et q deux projecteurs sur un espace vectoriel E ; montrer que : $p \circ q + q \circ p = \Theta \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = \Theta$ (endomorphisme nul). En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur. Dans ce dernier cas, exprimer le noyau de $p + q$ en fonction des noyaux de p et q , ainsi que son image en fonction des images de p et q . (Composer à gauche ou à droite par p ou q).

- *Corrigé* : Il est clair que si $p \circ q = q \circ p = 0$ alors la somme : $p \circ q + q \circ p = 0$. Il suffit donc de montrer l'implication dans l'autre sens, où l'on suppose au départ que : $p \circ q + q \circ p = 0$.

On applique p à gauche et q à droite de cette égalité : $p \circ p \circ q \circ q + p \circ q \circ p \circ q = p \circ q + (p \circ q) \circ (p \circ q) = 0$. (Si on sait que la composée de deux projecteurs est un projecteur, on peut arrêter là).

On applique ensuite q à gauche et p à droite : $q \circ p \circ q \circ p + q \circ q \circ p \circ p = (q \circ p) \circ (q \circ p) + q \circ p = 0$;

mais, comme par hypothèse $q \circ p = -p \circ q$: $p \circ q + (p \circ q) \circ (p \circ q) = 0$.

On soustrait les deux égalités obtenues et alors : $p \circ q - q \circ p = 0$; et comme $p \circ q + q \circ p = 0$, alors $p \circ q = q \circ p = 0$.

$p + q$ est un projecteur si et seulement si $(p + q)^2 = p + q$, c'est-à-dire : $p + p \circ q + q \circ p + q = p + q$, ou encore : $p \circ q + q \circ p = 0$. Donc : $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Soit $u \in \text{Ker}(p + q)$; alors, en appliquant p à gauche ou à droite : $p((p + q)(u)) = p(u) = 0_E$. De même en composant par q , et comme $p(u) = q(u) = 0_E \Rightarrow (p + q)(u) = 0_E$, alors : $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Soit $v \in \text{Im}(p + q)$; alors il existe u tel que $v = (p + q)(u) = p(u) + q(u) \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

C2.6) Soit E un espace de dimension 3, soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $f^2 + f - 2\text{id}_E = 0$

(l'application nulle). Montrer que f admet une base de vecteurs propres. En déduire les solutions de cette équation.

(Montrer que $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f + 2\text{id}_E)$ sont supplémentaires).

Soit $v \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, alors il existe $u_1 \in \text{Im}(p)$ et $u_2 \in \text{Im}(q)$ tel que : $v = p(u_1) + q(u_2)$. On applique p à gauche : $p(v) = p(u_1)$, puis q : $q(v) = q(u_2)$; par suite : $v = p(v) + q(v) = (p + q)(v)$ donc $v \in \text{Im}(p + q)$.

Il en résulte que : $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

C2.4) Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ de l'ensemble des réels dans lui-même. Soit ϕ et ψ les applications définies sur E par : $\phi(f) = g \Rightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt$; $\psi(f) = g \Rightarrow g(x) = f'(x)$. Montrer que ϕ et ψ sont linéaires ; comparer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$. Étudier $\text{id}_E - \phi$ et $\text{id}_E - \psi$; donner leurs noyaux. Soit $f = (x \mapsto \cos(x))$, qui est un élément de E , donner l'image réciproque de f par $\text{id}_E - \psi$.

- *Corrigé* : Les linéarités de ϕ et ψ découlent directement de la linéarité de la dérivation et de celle de l'intégrale.

$$\phi \circ \psi(x \mapsto f(x)) = \phi(x \mapsto f'(x)) = (x \mapsto \int_0^x f'(t)dt) = ((x \mapsto f(x)) - f(0)). \text{ Donc : } \phi \circ \psi = \text{id}_E - (x \mapsto f(0)).$$

$$\psi \circ \phi(x \mapsto f(x)) = \psi(x \mapsto \int_0^x f(t)dt) = ((x \mapsto (\int_0^x f(t)dt)') = (x \mapsto f(x)). \text{ Donc : } \psi \circ \phi = \text{id}_E.$$

Ces deux composées sont différentes en générale, sauf si $f(0) = 0$ (aucune des deux n'est la réciproque de l'autre).

- *Autre rédaction possible* : On note $P_0(f)$ la primitive de f qui s'annule en 0 et $C_0(f)$ la fonction $(x \mapsto f(0))$; alors $\phi \circ \psi(f) = P_0(f') = f - C_0(f)$, tandis que $\psi \circ \phi(f) = (P_0(f))' = f$.

$$(\text{id}_E - \phi)(x \mapsto f(x)) = (x \mapsto f(x)) - (x \mapsto \int_0^x f(t)dt) = (x \mapsto f(x)) - \int_0^x f(t)dt.$$

$$\text{- Ou bien : } (\text{id}_E - \phi)(f) = f - \phi(f) = f - P_0(f).$$

$$(\text{id}_E - \psi)(x \mapsto f(x)) = (x \mapsto f(x)) - (x \mapsto f'(x)) = (x \mapsto f(x)) - f'(x).$$

$$\text{- Ou bien : } (\text{id}_E - \psi)(f) = f - \psi(f) = f - f'.$$

$\text{id}_E - \phi$ et $\text{id}_E - \psi$ sont des applications linéaires ; $f \in \text{Ker}(\text{id}_E - \phi) \Leftrightarrow f(x) = \int_0^x f(t)dt$; en dérivant : $f'(x) = f(x)$.

$f \in \text{Ker}(\text{id}_E - \psi) \Leftrightarrow f(x) = f'(x)$. C'est-à-dire : $f(x) = k.e^x$, $k \in \mathbb{R}$.

Pour le premier il y a en plus la condition $f(0) = 0$, donc : $k = 0$. Par suite :

$$\text{Ker}(\text{id}_E - \phi) = \{0_E\}, \text{ d'où : } \text{id}_E - \phi \text{ injective ; et } \text{Ker}(\text{id}_E - \psi) = \{k.e^x, k \in \mathbb{R}\}.$$

On peut approfondir un peu cette question en cherchant à savoir si $\text{id}_E - \phi$ ne serait pas aussi surjective ? Soit, donc, un élément f quelconque de E , et g telle que $(\text{id}_E - \phi)(g) = f$; alors :

$g(x) - \int_0^x g(t)dt = f(x)$; soit G la primitive de g qui s'annule en 0 ; ainsi : $G'(x) - G(x) = f(x)$; il faut résoudre l'équation différentielle : $y' - y = f$. Alors (voir la question suivante) : $G(x) = (\int_0^x f(t)e^{-t}dt + k).e^x$, $k \in \mathbb{R}$, et $G(0) = 0$,

donc : $G(x) = (\int_0^x f(t)e^{-t}dt).e^x$. On dérive pour trouver g l'antécédent de f : $g(x) = f(x) + (\int_0^x f(t)e^{-t}dt).e^x$.

Ainsi, $\text{id}_E - \phi$ est surjective et injective, donc bijective ; c'est un automorphisme.

Soit $f = (x \mapsto \cos(x))$, et g telle que $(\text{id}_E - \psi)(g) = f$: $(x \mapsto g(x)) - (x \mapsto g'(x)) = (x \mapsto \cos(x))$, ce qui revient à résoudre l'équation différentielle : $y - y' = \cos(x)$:

L'équation homogène (sans second membre) : $y' - y = 0$, admet pour solution générale : $y = k.e^x$, $k \in \mathbb{R}$.

Par la méthode de variation de la constante, l'équation complète (avec second membre) se ramène à : $k'.e^x = -\cos(x)$, ou encore : $k' = -e^{-x}.\cos(x)$. Il existe des solutions de la forme : $(a.\cos(x) + b.\sin(x)).e^{-x}$, dont la dérivée vaut :

$$((b - a).\cos(x) - (b + a).\sin(x)).e^{-x}, \text{ d'où : } b - a = -1 \text{ et } b + a = 0, \text{ à savoir : } k(x) = \frac{1}{2}.\cos(x) - \sin(x).e^{-x}.$$

Finalement, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$f^{-1}((x \mapsto \cos(x))) = \left\{ \frac{1}{2}.\cos(x) - \sin(x) + k.e^x, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{- Autre méthode : On a } k' = \text{Re}(-e^{(i-1)x}) = \text{Re}\left(\frac{1}{1-i}.e^{(i-1)x}\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2}.e^{-i\pi/4}}.e^{(i-1)x}\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.e^{(i-1)x + i\pi/4}\right) =$$

$$k' = \frac{1}{\sqrt{2}}.\text{Re}(e^{-x + i(x + \pi/4)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.e^{-x}.\cos(x + \pi/4), \text{ d'où : } f^{-1}((x \mapsto \cos(x))) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}.\cos(x + \pi/4) + k.e^x, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

C2.5) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n , muni de sa base canonique usuelle $B = (1, X, \dots, X^n)$, et f l'application définie sur E par : $f(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$. Montrer qu'elle arrive bien dans E , puis que c'est un endomorphisme et donner sa matrice dans B . Montrer que si n est impair alors f est bijective et que si n est pair alors $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1 - X^2)^{n/2})$. Soit $\phi(P, Q) = \sum_{k=0}^n (f(P)f(Q))(k)$; montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique positive. Est-elle définie ou non dégénérée ?

- *Corrigé* : Si P est de degré strictement inférieur à n , alors nXP et $(X^2 - 1)P'$ sont de degrés inférieurs à n ; il n'y a donc pas de problème. Soit P un polynôme de degré n ; alors nXP et $(X^2 - 1)P'$ sont de degrés $n + 1$; il faut donc montrer que les termes de degré $n + 1$ s'annulent. Soit $a_n X^n$ le terme de degré n de P ; alors le terme de degré $n + 1$ de nXP est $n \cdot a_n X^{n+1}$, tandis que celui de $(X^2 - 1)P'$ vient de $X^2 P'$ et vaut $X^2 \cdot n \cdot a_n X^{n-1}$ qui lui est égal. Ces deux termes s'annulent donc bien dans la soustraction des deux : $nXP - (X^2 - 1)P'$, et il s'en suit que $f(P)$ est bien de degré inférieur ou égal à n .

C'est de façon évidente un endomorphisme : $f(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \dots = \alpha_1 f(P_1) + \alpha_2 f(P_2)$.

On cherche ensuite l'image de la base canonique : $f(1) = nX$, et pour $1 \leq k \leq n$: $f(X^k) = (n - k)X^{k+1} + kX^{k-1}$.
Donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow (X^2 - 1)P' = nXP$; on assimile les polynômes à des fonctions, et on résout l'équation différentielle :

$$y' = \frac{ny}{x^2 - 1}, \text{ dont la solution générale est } y = k \cdot |x^2 - 1|^{n/2}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Si n est impair il n'y a pas de solution polynomiale, donc $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, et f est bijective (car la dimension est finie).

Si n est pair les polynômes de la forme $k \cdot (X^2 - 1)^{n/2}$ sont solutions, donc : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1 - X^2)^{n/2})$.

Grâce à la linéarité de f , il est simple de montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique. Elle est positive car $\phi(P, P)$ est une somme de carrés.

Comme c'est une forme bilinéaire symétrique positive, il est équivalent de montrer qu'elle est définie ou non dégénérée :

Comme $\phi(P, P)$ est une somme de carrés : $\phi(P, P) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(P)(k) = 0$; $f(P)$ étant un polynôme de degré n , il ne peut avoir $n + 1$ racines que s'il est nul, donc : $\phi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0_E$ (il y a donc équivalence).

Ainsi, ϕ est définie si n impair et elle ne l'est pas sinon.

C2.6) Soit E un espace de dimension 3, soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $f^2 + f - 2\text{id}_E = 0$ (l'application nulle). Montrer que f admet une base de vecteurs propres. En déduire les solutions de cette équation. (Montrer que $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f + 2\text{id}_E)$ sont supplémentaires).

- *Corrigé* : Soit $u \in \text{Ker}(f - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f + 2\text{id}_E)$; alors : $f(u) = u = -2u$ donc $u = 0_E$. On a bien le résultat souhaité : $\text{Ker}(f - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f + 2\text{id}_E) = \{0_E\}$.

Soit $u \in E$ quelconque, $v = (f + 2\text{id}_E)(u)$ et $w = (f - \text{id}_E)(u)$. Alors : $(f - \text{id}_E)(v) = (f + 2\text{id}_E)(w) = 0_E$, donc : $v \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $w \in \text{Ker}(f + 2\text{id}_E)$. Il s'en suit que $\frac{1}{3} \cdot v \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $-\frac{1}{3} \cdot w \in \text{Ker}(f + 2\text{id}_E)$. Par suite : $u = \frac{1}{3} \cdot v + (-\frac{1}{3}) \cdot w \in \text{Ker}(f - \text{id}_E) + \text{Ker}(f + 2\text{id}_E) = E$. On a donc bien : $\text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{id}_E) = E$.

Il existe donc une base de E réunion d'une base de $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et d'une base de $\text{Ker}(f + 2\text{id}_E)$; mais, les éléments de ces noyaux étant des vecteurs propres, il existe donc une base de vecteurs propres.

Si D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont 1 ou -2, et P une matrice inversible quelconque, l'application f dont la matrice dans la base canonique est $P^{-1}DP$ est solution (réciproquement, toutes les solutions sont de cette forme).