C3) TD : Espaces vectoriels (troisième partie).

C3.1) Si E est de dimension 3, soit les vecteurs u, v, w donnés dans la base canonique par : $u:\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $v:\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, et $w:\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Donner la matrice dans la base canonique de la projection p sur le plan $\mathrm{Vect}(u, v)$ de direction la droite dirigée par w. (Utiliser la méthode du pivot).

- *Corrigé* : Étant donné un vecteur quelconque $x:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, alors $x = \alpha.u + \beta.v + \gamma.w$ et $p(x) = \alpha.u + \beta.v = x - \gamma.w$.

Il suffit donc d'inverser le système : $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \gamma.\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, jusqu'à obtenir γ en fonction de x_1, x_2, x_3.

Après calculs : $\gamma = \frac{1}{3}(3x_1 + 2x_2 - x_3)$. Par suite : $p(x) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \frac{1}{3}(3x_1 + 2x_2 - x_3).\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\\frac{1}{3}(-3x_1 + x_2 + x_3)\\\frac{1}{3}(3x_1 + 2x_2 + 2x_3)\end{pmatrix}$, d'où la matrice de p : $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1/3 & 1/3\\1 & 2/3 & 2/3\end{pmatrix}$.

- *Autre méthode* : Soit q la projection sur $\mathrm{Vect}(w)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u, v)$; alors, x étant un vecteur quelconque de E : $x = p(x) + q(x)$, et, en notant M et N les matrices respectives de p et q dans la base canonique :

$$N = \frac{w\times{}^t(u\wedge v)}{\det(u, v, w)} = -\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 2 & -1\\-3 & -2 & 1\end{pmatrix}, \text{ et : } M = I - N = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1/3 & 1/3\\1 & 2/3 & 2/3\end{pmatrix}.$$

C3.2) Si E est de dimension 3, donner la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport au plan d'équation : $(x + y + z = 0)$, de direction la droite d'équations : $\{x - y + z = 0,\ 3x + y - 2z = 0\}$. (Utiliser la méthode du pivot).

- *Corrigé* : Comme $s = 2p - \mathrm{id}_E$, on peut d'abord chercher la projection et appliquer l'une des deux méthodes de l'exercice précédent :

Soit p la projection sur le plan $(x + y + z = 0)$, de direction la droite $\{x - y + z = 0,\ 3x + y - 2z = 0\}$; alors, en notant u_1, u_3 des vecteurs directeurs du plan non colinéaires et u_3 un vecteur directeur de la droite ; par exemple : $u_1:\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $u_2:\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $u_3:\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$ $(y = 5x,\ z = 4x)$. Alors, étant donné un vecteur $v:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3$:

$p(v) = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 = v - \alpha_3.u_3$, et : $s(v) = 2p(v) - v = v - 2\alpha_3.u_3$.

Il suffit donc d'inverser le système : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha_1.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2.\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3.\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$, jusqu'à obtenir α_3 en fonction de x, y, z.

Après calculs : $\alpha_3 = \frac{1}{10}(x + y + z)$, d'où : $s(v) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{1}{10}(x + y + z)\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}(4x - y - z)\\-x - z\\\frac{1}{5}(-4x - 4y + z)\end{pmatrix}$; la matrice de s est donc : $M = \begin{pmatrix}4/5 & -1/5 & -1/5\\-1 & 0 & -1\\-4/5 & -4/5 & 1/5\end{pmatrix}$.

- *Deuxième méthode* : Soit q la projection sur la droite $\{x - y + z = 0,\ 3x + y - 2z = 0\}$, de direction le plan $(x + y + z = 0)$; alors $v = p(v) + q(v)$, donc $s(v) = 2p(v) - v = v - 2q(v)$. Soit N et M les matrices respectives de q et s dans la base canonique ; alors :

$$N = \frac{u_3\times{}^t(u_1\wedge u_2)}{\det(u_1, u_2, u_3)} = \frac{1}{10}.\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\5 & 5 & 5\\4 & 4 & 4\end{pmatrix}, \text{ d'où : } M = I - 2N = \begin{pmatrix}4/5 & -1/5 & -1/5\\-1 & 0 & -1\\-4/5 & -4/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

C3.3) Donner l'image et le noyau de f dont la matrice dans les bases canoniques est : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -m \end{pmatrix}$, où m est un réel fixé $(f \in \mathscr{L}(E, F))$.

- *Corrigé* : On applique la méthode du pivot de Gauss ; par exemple :

$$\begin{array}{ccccc|cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ L_1+3L_2 \to L_1 \\ L_2+L_3 \to L_2 \\ \\ L_4-L_3 \to L_4 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc|cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -5 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -m & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ L_1+2L_3+7L_4 \to L_1 \\ L_2+2L_4 \to L_2 \\ L_3+L_4 \to L_3 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{ccccc|cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 2-7m & 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-2m & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -m & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

On peut exprimer x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction de y_1, y_2, y_3, y_4 et x_5. Ainsi : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 7m-2 \\ 2m-1 \\ m \\ m \\ 1 \end{pmatrix})$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.

On remarque à ce propos que le théorème du rang est bien vérifié : $\dim(F) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$.

C3.4) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, A et B deux polynômes à coefficients réels et a un réel fixé tel que $A(a) \neq -1$. Déterminer l'ensemble F défini par : $F = \{P \in E,\ P + P(a).A = B\}$. (Soit $f(P) = P + P(a).A$, montrer que f est linéaire, puis exprimer $(f - id_E)^2$ en fonction de $f - id_E$, en déduire qu'il existe une fonction g telle que $f{\circ}g = (1 + A(a)).id_E$). Traiter le cas particulier $A(a) = -1$.

- *Corrigé* : On répond d'abord à l'indication : $(f - id_E)(P) = f(P) - P = P(a).A$;

$(f - id_E)^2(P) = (f - id_E)(P(a)A) = [P(a)A](a).A = P(a)A(a).A = A(a).(f - id_E)(P)$.

Ainsi : $(f - id_E)^2 = A(a).(f - id_E)$, donc : $f^2 - (2 + A(a))f + (1 + A(a))id_E = 0$, qu'on écrit plutôt :

$f{\circ}g = (1 + A(a))id_E$, où $g = (2 + A(a))id_E - f$.

- Si $A(a) \neq -1$, alors f est inversible avec $f^{-1} = \frac{1}{1 + A(a)}.g$: $F = f^{-1}(B) = ... = \{B - \frac{B(a)}{1 + A(a)}.A)\}$.
- Si $A(a) = -1$, alors : $f^2 - (2 + A(a))f + (1 + A(a))id_E = 0$ devient : $f^2 = f$, donc f est un projecteur.

$\mathrm{Ker}(f)$ est déterminé par l'équation $P = -P(a).A$, donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$; $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Ker}(f - id_E)$, est donc déterminé par l'équation $P(a).A = 0$. En outre $A \neq 0$ car $A(a) = -1$,donc $P(a) = 0$. Ainsi : $\mathrm{Im}(f) = (X - a).\mathbb{R}[X]$.

Si $B \notin \mathrm{Im}(f)$, donc si $B(a) \neq 0$, alors il n'y a pas de solution. Sinon, B est une solution évidente car $f(B) = B$.

Donc : $F = B + \mathrm{Ker}(f) = B + \mathrm{Vect}(A)$ (les éléments de F sont de la forme $B + k.A$ où $k \in \mathbb{R}$; dans les deux cas on trouve un élément de la forme $B + k.A$, où $k = -B(a)/(1 + A(a))$ dans le premier cas, et k réel quelconque dans le second cas).

C3.5) Soit f un endomorphisme quelconque de E. Si f vérifie : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, montrer que l'on a alors : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Étudier le cas particulier de la dimension finie. Si f vérifie : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, montrer que : $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$. Étudier le cas particulier de la dimension finie.

- *Corrigé* : Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$; comme $u \in \mathrm{Im}(f)$, il existe x tel que $u = f(x)$. Alors $0_E = f(u) = f^2(x)$, d'où l'on déduit $x \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, donc $u = f(x) = 0_E$. On a bien : $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

En dimension finie, avec le théorème du rang on a : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) = n$, donc, avec la formule de Grassman : $\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)) = n$. Et ainsi :

$\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$, qu'on peut écrire : $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$; ils sont supplémentaires.

Soit $u \in E$ quelconque et $v = f(u) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, donc il existe x tel que $v = f^2(x)$. Ainsi : $f(u) - f^2(x) = 0_E$, donc : $f(u - f(x)) = 0_E$, d'où l'on déduit : $u - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Mais comme $u = (u - f(x)) + f(x)$, somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(f)$, alors : $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

En dimension finie on applique le théorème du rang et la formule de Grassman :

$\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)) = n$, donc : $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)) = 0$. Par suite : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$, et on a une nouvelle fois : $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$; ils sont encore supplémentaires.