

C4) TD : Espaces vectoriels (quatrième partie).

C4.1) Résoudre, m étant un réel fixé : a) $\begin{cases} x + y - mz = 0 \\ (m+1)x + 2y - 2z = 0 \\ x + (m+1)y + z = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m^2 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

- *Corrigé* : a) On applique la méthode' du pivot de Gauss :

$\begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & -m & 0 \\ m+1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & m+1 & 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} L_2 - (m+1)L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & -m & 0 \\ 0 & 1-m & m^2+m-2 & 0 \\ 0 & m & m+1 & 0 \end{array}$
--	--	---

• Si $m = 1$:

$\begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} L_1 - L_3 \rightarrow L_1 \\ L_3 \rightarrow L_2 \\ L_2 \rightarrow L_3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
---	--	---

L'ensemble des solution est : $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

• Si $m \neq 1$, on simplifie L_2 par $m - 1$:

$\begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -m-2 & 0 \\ 0 & m & m+1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 - mL_2 \rightarrow L_3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -m-2 & 0 \\ 0 & 0 & m^2+3m+1 & 0 \end{array}$
--	--	--

• Si $m = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$, la dernière ligne est nulle ; l'ensemble des solutions est : $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

• Si $m \neq 1$ et $m \neq \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$, c'est un système de Cramer dont l'unique solution est le vecteur nul $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

b)

$\begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m^2 \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}$	$\begin{array}{l} L_1 + L_2 + L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 - L_3 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline m+2 & m+2 & m+2 & 2m^2 + 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 1-m & 0 & m-1 & m^2 - 1 \end{array}$
--	--	---

• Si $m = -2$, la première ligne est une impossibilité, il n'y a donc pas de solution.

• Si $m = 1$ alors $x + y + z = 1$; l'ensemble des solutions est : $(1, 0, 0) + \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$.

• Si $m \neq -2$ et $m \neq 1$, on simplifie : $x + y + z = (2m^2 + 1)/(m + 2)$, $y = z$, $x = z - m - 1$, d'où l'on déduit rapidement : $x = -(2m + 1)/(m + 2)$, $y = z = (m^2 + m + 1)/(m + 2)$.

C4.2) Soit M la matrice d'ordre 4 ayant tous ses termes égaux à 1, sauf sa diagonale dont les éléments sont nuls. Est-elle inversible ?

- *Corrigé* : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (si on ne souhaite pas connaître l'inverse, seule la partie gauche des tableaux est nécessaire) :

(On peut utiliser une ligne fictive $L_0 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ pour simplifier).

$\begin{array}{cccc c} 0 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$	$\begin{array}{l} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} -2L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \rightarrow L_1 \\ L_1 - 2L_2 + L_3 + L_4 \rightarrow L_2 \\ L_1 + L_2 - 2L_3 + L_4 \rightarrow L_3 \\ L_1 + L_2 + L_3 - 2L_4 \rightarrow L_4 \end{array}$	$\begin{array}{cccc c} 3 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \end{array}$	$\begin{array}{l} -2 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ -2 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ -2 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ -2 \end{array}$
---	---	--	---	---

M est donc inversible, avec $M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

C4.3) a) A et B étant des matrices carrées données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $X = \text{tr}(X).A + B$.

b) A étant une matrice carrée donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $X + {}^tX = \text{tr}(X).A$.

- *Corrigé* : a) Si on applique la transposée à cette égalité, on trouve que si $\text{tr}(X) \neq 0$, il est nécessaire pour avoir des solutions que A soit une matrice symétrique.

On applique ensuite la trace à l'égalité, en utilisant la linéarité : $(1 - \text{tr}(A)).\text{tr}(X) = \text{tr}(B)$.

• Si $\text{tr}(A) = 1$ et $\text{tr}(B) \neq 0$, il n'y a pas de solution.

• Si $\text{tr}(A) = 1$ et $\text{tr}(B) = 0$: Alors B est une solution particulière de l'équation. On pose $X = Y + B$; alors : $Y = \text{tr}(Y).A$, d'où l'on déduit que $Y \in \text{Vect}(A)$. Réciproquement, si $Y = \alpha.A$ alors Y est solution. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation initiale est : $B + \text{Vect}(A)$.

• Si $\text{tr}(A) \neq 1$, il existe alors une unique solution car $\text{tr}(X) = \frac{\text{tr}(B)}{1 - \text{tr}(A)}$, donc : $X = \frac{\text{tr}(B)}{1 - \text{tr}(A)}.A + B$.

b) De même : $2.\text{tr}(X) = \text{tr}(X)\text{tr}(A)$, donc : $\text{tr}(X)(2 - \text{tr}(A)) = 0$.

• Si $\text{tr}(A) \neq 2$, alors $\text{tr}(X) = 0$ et, donc : $X + {}^tX = 0$; l'ensemble des solutions est l'ensemble \mathcal{A} des matrices antisymétriques.

• Si $\text{tr}(A) = 2$: Toute matrice antisymétrique reste solution. On sait que toute matrice est somme d'une matrice antisymétrique Y et d'une matrice symétrique Z : $X = Y + Z$; alors : $Z + Z = \text{tr}(Z).A$ (car ${}^tZ = Z$). Il s'en suit que $Z \in \text{Vect}(A)$.

Si A n'est pas symétrique, la seule possibilité est $Z = 0$, l'ensemble des solutions est donc \mathcal{A} .

Si A est symétrique, alors $Z = \alpha.A$ est solution, l'ensemble des solutions est donc $\mathcal{A} + \text{Vect}(A)$.

C4.4) Déterminer le rang et éventuellement l'inverse de : a) $\begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) \\ \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) & \cos(6a) \end{pmatrix}$.

- *Corrigé* : a) $i.C_1 + C_2 \rightarrow C_2$, $i.C_1 + C_3 \rightarrow C_3$, $-C_1 + C_4 \rightarrow C_4$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2i & 4i & 2 \end{pmatrix}$. Le rang est donc 2 (elle ne pouvait être inversible car non carrée).

b) $\cos((k+2)a) + \cos(ka) = 2.\cos(a)\cos((k+1)a)$, c'est-à-dire : $\cos((k+2)a) = -\cos(ka) + 2.\cos(a)\cos((k+1)a)$, ou encore : $C_3 = -C_1 + 2.\cos(a).C_2$, $C_4 = -C_2 + 2.\cos(a).C_3 = \dots = -2.\cos(a).C_1 + (4.\cos^2(a) - 1).C_2$.

C_4 et C_3 sont donc des combinaisons linéaires de C_1 et C_2 ; M a même rang que $N = \begin{pmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(3a) & \cos(4a) \end{pmatrix}$. On

applique le même procédé aux lignes de N que celle qui l'a été aux colonnes de M ; ainsi, N et M sont de même rang que $T = \begin{pmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{pmatrix}$, dont le déterminant vaut $\cos(2a) - \cos^2(a) = \cos^2(a) - 1 = -\sin^2(a)$.

Alors, si $a \neq k\pi$, $\text{rg}(M) = 2$; et si $a = k\pi$, $\text{rg}(M) = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; elle n'est jamais inversible.

C4.5) Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables : $\begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$.

- *Corrigé* : - Première méthode, trop longue : on cherche P telle que $\begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} P^{-1}$, donc :

$$\begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} P = P \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soit : } P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} ; \text{ alors : } \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} = \Theta \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - x_3 & -x_1 + 3y_1 + y_2 - y_3 & 2z_1 + z_2 - z_3 \\ -6x_1 - 2x_2 + 2x_3 & -x_2 - 6y_1 - 2y_2 + 2y_3 & -6z_1 - 3z_2 + 2z_3 \\ 2x_1 + x_2 & -x_3 + 2y_1 + y_2 & 2z_1 + z_2 - z_3 \end{pmatrix} = \Theta.$$

On peut réduire le système obtenu par la méthode du pivot de Gauss (en supprimant les deux lignes redondantes) :

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	
3	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	3	1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	2	1	-1	0	0
0	-1	0	-6	-2	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-6	-3	2	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	2	1	0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	
1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	-1	0	-6	-2	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-6	-3	2	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	2	1	0	0	0	0	0

Des six premières lignes, on déduit : $x_3 = x_1$, $x_2 = -2x_1$, $y_3 = y_1$, $y_2 = x_1 - 2y_1$, $z_3 = 0$, $z_2 = -2z_1$, ce qui est compatible avec la septième, d'où :

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ -2x_1 & x_1 - 2y_1 & -2z_1 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ par exemple, pour } x_1 = z_1 = 1, y_1 = 0 : P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices sont bien semblables.

- *Deuxième méthode, inspirée de la trigonalisation* : Si les deux matrices sont semblables, elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes, à savoir la base canonique B pour $M = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$, et

une base $B' = (u_1, u_2, u_3)$ pour $N = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$.

On a donc : $f(u_1) = (1-a)u_1$, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre $1-a$; $f(u_2) = u_1 + (1-a)u_2$; $f(u_3) = (2-a)u_3$, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre $2-a$. Ainsi :

$$\text{Pour } u_1 : \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-a) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ d'où l'on déduit après résolution que } u_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } u_2 : \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-a) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ d'où l'on déduit après résolution que } u_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (pour } x=0).$$

$$\text{Pour } u_3 : \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2-a) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ d'où l'on déduit après résolution que } u_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$