# C5) TD : Espaces vectoriels (cinquième partie).

C.5.1) Soit $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ des matrices carrées d'ordre $n$ ; montrer que :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}.B_{11} + A_{12}.B_{21} & A_{11}.B_{12} + A_{12}.B_{22} \\ A_{21}.B_{11} + A_{22}.B_{21} & A_{21}.B_{12} + A_{22}.B_{22} \end{pmatrix}.$$

- *Corrigé* : Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = (a_{i,k})_{\substack{1 \le i \le 2n \\ 1 \le k \le 2n}}$, alors : $A_{11} = (a_{i,k})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le n}}$, $A_{12} = (a_{i,k})_{\substack{1 \le i \le n \\ n+1 \le k \le 2n}}$, $A_{21} = (a_{i,k})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ 1 \le k \le n}}$, $A_{22} = (a_{i,k})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ n+1 \le k \le 2n}}$ ; et soit $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = (b_{k,j})_{\substack{1 \le k \le 2n \\ 1 \le j \le 2n}}$, alors : $B_{11} = (b_{k,j})_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $B_{12} = (b_{k,j})_{\substack{1 \le k \le n \\ n+1 \le j \le 2n}}$, $B_{21} = (b_{k,j})_{\substack{n+1 \le k \le 2n \\ 1 \le j \le n}}$, $B_{22} = (b_{k,j})_{\substack{n+1 \le k \le 2n \\ n+1 \le j \le 2n}}$. Ainsi : $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = (a_{i,k})_{\substack{1 \le i \le 2n \\ 1 \le k \le 2n}} . (b_{k,j})_{\substack{1 \le k \le 2n \\ 1 \le j \le 2n}} = (\sum_{k=1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{1 \le i \le 2n \\ 1 \le j \le 2n}}$.

On note $C = AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = (c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le 2n \\ 1 \le j \le 2n}}$, alors : $C_{11} = (c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $C_{12} = (c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ n+1 \le j \le 2n}}$, $C_{21} = (c_{i,j})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ 1 \le j \le n}}$, $C_{22} = (c_{i,j})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ n+1 \le j \le 2n}}$. Avec en outre : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j}$.

- Si $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$ : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j}$, donc :

$C_{11} = (c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} + (\sum_{k=n+1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$.

- Si $1 \le i \le n$ et $n + 1 \le j \le 2n$ : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j}$, donc :

$C_{12} = (c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ n+1 \le j \le 2n}} = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ n+1 \le j \le 2n}} + (\sum_{k=n+1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ n+1 \le j \le 2n}} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$.

- Si $n + 1 \le i \le 2n$ et $1 \le j \le n$ : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j}$, donc :

$C_{21} = (c_{i,j})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ 1 \le j \le n}} = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ 1 \le j \le n}} + (\sum_{k=n+1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ 1 \le j \le n}} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$.

- Si $n + 1 \le i \le 2n$ et $n + 1 \le j \le 2n$ : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j}$, donc :

$C_{22} = (c_{i,j})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ n+1 \le j \le 2n}} = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ n+1 \le j \le 2n}} + (\sum_{k=n+1}^{2n} a_{i,k}b_{k,j})_{\substack{n+1 \le i \le 2n \\ n+1 \le j \le 2n}} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$.

On pourrait aussi raisonner plus rapidement en utilisant les lignes de $A$ avec les colonnes de $B$.

C5.2) Si $E$ est de dimension $2$ soit, pour $u:\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $v:\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ : $f(u, v) = 33x_1y_1 - 14(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2$. Écrire la matrice de $f$ dans la base canonique $B = (e_1, e_2)$. Montrer que la famille $B' = (e'_1, e'_2)$, pour : $e'_1 = e_1 + 2e_2$, et : $e'_2 = 2e_1 + 5e_2$, est une base de $E$ ; exprimer $f$ dans la base $B'$ et donner sa matrice. (Ce n'est pas $P^{-1}MP$).

- *Corrigé* : Soit $M$ la matrice de $f$ dans $B$ et $M'$ sa matrice dans $B'$, si tant est que $B'$ est bien une base. Alors : $M = \begin{pmatrix} 33 & -14 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}$. En outre : $\det(B') = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $B'$ est donc bien une base. On a ainsi : $M' = {}^tPMP$, donc : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33 & -14 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

C5.3) Soit $E = \mathbb{K}_2[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à $2$, muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2)$. Soit $f$ définie pour tout couple $(P, Q)$ d'éléments de $E$ par :

$f(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Montrer que $f$ est une forme bilinéaire non dégénérée, et donner sa matrice dans $B$.

- *Corrigé* : La bilinéarité vient de la linéarité de l'intégrale. Cette forme bilinéaire est symétrique et positive car $f(P, P)$ est l'intégrale d'un carré. Il est simple de montrer qu'elle est non dégénérée car elle est définie : Si l'intégrale d'une fonction positive est nulle sur un segment, ça signifie que la fonction est nulle sur ce segment. Or, si un polynôme est nul sur un segment, ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

- *On peut aussi procéder directement* :

Un élément quelconque de $E$ est de la forme $P = aX^2 + bX + c$, et $Q = a'X^2 + b'X + c'$ ; ainsi :

$f(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c')dx = ...$

Il est plus simple de construire la matrice directement en calculant les images de la base (matrice de Gram) :

$$M = \begin{pmatrix} f(1, 1) & f(1, X) & f(1, X^2) \\ f(X, 1) & f(X, X) & f(X, X^2) \\ f(X^2, 1) & f(X^2, X) & f(X^2, X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Soit $(a, b, c)$ tels que pour tout triplet $(x, y, z)$ : $(a\ \ b\ \ c)M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ ; on donne successivement à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les valeurs des colonnes de la matrice identique : $(a\ \ b\ \ c)M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a + b/2 + c/3 = 0$ ; $(a\ \ b\ \ c)M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a/2 + b/3 + c/4 = 0$ ; $(a\ \ b\ \ c)M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a/3 + b/4 + c/5 = 0$. La solution de ce système est l'unique triplet $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, la forme bilinéaire est donc bien non dégénérée.

C5.4) Soit $\phi$ une forme bilinéaire sur $E$ telle que : $\phi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$, et $f$ une application de $E$ dans lui-même telle que pour tout couple de vecteurs $u$ et $v$ de $E$ on ait : $\phi(f(u), f(v)) = \phi(u, v)$. Montrer que $f$ est un endomorphisme injectif.

- *Corrigé* : Il faut d'abord montrer que c'est un endomorphisme ; la démonstration est classique :

$\phi(f(\lambda.u) - \lambda.f(u), f(\lambda.u) - \lambda.f(u)) = \phi(f(\lambda.u), f(\lambda.u)) - \phi(f(\lambda.u), \lambda.f(u)) - \phi(\lambda.f(u), f(\lambda.u)) + \phi(\lambda.f(u), \lambda.f(u)) =$

$\phi(\lambda.u, \lambda.u) - \lambda.\phi(f(\lambda.u), f(u)) - \lambda.\phi(f(u), f(\lambda.u)) + \lambda^2.\phi(f(u), f(u)) =$

$\lambda^2.\phi(u, u) - \lambda.\phi(\lambda.u, u) - \lambda.\phi(u, \lambda.u) + \lambda^2.\phi(u, u) = \lambda^2.\phi(u, u) - \lambda^2.\phi(u, u) - \lambda^2.\phi(u, u) + \lambda^2.\phi(u, u) = 0.$

Donc : $\phi(f(\lambda.u) - \lambda.f(u), f(\lambda.u) - \lambda.f(u)) = 0 \Rightarrow f(\lambda.u) - \lambda.f(u) = 0_E$, c'est-à-dire : $f(\lambda.u) = \lambda.f(u)$.

De même : $\phi(f(u + v) - f(u) - f(v), f(u + v) - f(u) - f(v)) =$

$\phi(f(u + v), f(u + v)) - \phi(f(u + v), f(u)) - \phi(f(u + v), f(v))$

$- \phi(f(u), f(u + v)) + \phi(f(u), f(u)) + \phi(f(u), f(v)) - \phi(f(v), f(u + v)) + \phi(f(v), f(u)) + \phi(f(v), f(v)) =$

$\phi(u + v, u + v) - \phi(u + v, u) - \phi(u + v, v) - \phi(u, u + v) + \phi(u, u) + \phi(u, v) - \phi(v, u + v) + \phi(v, u) + \phi(v, v)$.

On pourrait évidemment développer, mais on peut aussi faire la remarque qu'il s'agit, par analogie, du développement par bilinéarité de : $\phi(u + v - u - v, u + v - u - v) = \phi(0_E, 0_E) = 0$.

Donc : $\phi(f(u + v) - f(u) - f(v), f(u + v) - f(u) - f(v)) = 0 \Rightarrow f(u + v) - f(u) - f(v) = 0_E$, c'est-à-dire :

$f(u + v) = f(u) + f(v)$. Les deux conditions étant remplies, $f$ est bien un endomorphisme.

Injectivité : Soit $u \in Ker(f)$, alors : $f(u) = 0_E \Rightarrow 0 = \phi(0_E, 0_E) = \phi(f(u), f(u)) = \phi(u, u) \Rightarrow u = 0_E$.

Le noyau de $f$ étant réduit à $0_E$, elle est bien injective.

C5.5) Soit $\phi$ une forme bilinéaire sur $E$ telle que, pour tout couple $(u, v)$ de vecteurs, on ait l'équivalence : $\phi(u, v) = 0 \Leftrightarrow \phi(v, u) = 0$. Montrer que $\phi$ est symétrique ou alternée.

($\phi$ est alternée ou non, auquel cas il existe $x$ tel que $\phi(x, x) \neq 0$, développer alors $\phi(x, u - (\phi(x, u)/\phi(x, x)).x)$ et utiliser une des propriétés de $\phi$. Ensuite, pour $\phi(u, x) \neq 0$, utiliser $\phi(u, v - (\phi(u, v)/\phi(u, x)).x)$. Enfin, pour $\phi(u, x) = 0$, utiliser $\phi(u + x, v - (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).x)$).

- *Corrigé* : Si $\phi$ est alternée (resp. symétrique), on a bien l'équivalence donnée en hypothèse, car les formes bilinéaires alternées sont antisymétriques. Les formes bilinéaires alternées (resp. symétriques) sont donc bien solutions du problème.

On suppose donc maintenant que $\phi$ n'est pas alternée. Il existe donc au moins un vecteur $x$ tel que $\phi(x, x) \neq 0$. On calcule, selon l'indication :

$\phi(x, u - (\phi(x, u)/\phi(x, x)).x) = \phi(x, u) - \phi(x, (\phi(x, u)/\phi(x, x)).x) = \phi(x, u) - (\phi(x, u)/\phi(x, x)).\phi(x, x) = 0$. Or :

$\phi(u - (\phi(x, u)/\phi(x, x)).x, x) = \phi(u, x) - \phi((\phi(x, u)/\phi(x, x)).x, x) = \phi(u, x) - (\phi(x, u)/\phi(x, x)).\phi(x, x) = \phi(u, x) - \phi(x, u)$.

On a donc, en supposant l'équivalence réalisée : $\phi(u, x) = \phi(x, u)$.

- Soit $u$ tel que $\phi(u, x) \neq 0$ :

$\phi(u, v -(\phi(u, v)/\phi(u, x)).x) = \phi(u, v) - \phi(u, (\phi(u, v)/\phi(u, x)).x) = \phi(u, v) - (\phi(u, v)/\phi(u, x)).\phi(u, x) = 0$. Or :t

$\phi(v -(\phi(u, v)/\phi(u, x)).x, u) = \phi(v, u) - \phi((\phi(u, v)/\phi(u, x)).x, u) = \phi(v, u) - (\phi(u, v)/\phi(u, x)).\phi(x, u) = \phi(v, u) - \phi(u, v)$.

On a donc, en supposant l'équivalence réalisée : $\phi(u, v) = \phi(v, u)$.

- Soit $u$ tel que $\phi(u, x) = 0$ : $\phi(u + x, v - (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).x) = \phi(u + x, v) - \phi(u + x, (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).x) =$

$\phi(u + x, v) - (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).\phi(u + x, x) = \phi(u + x, v) - (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).(\phi(u, x) + \phi(x, x)) = 0$.

Or : $\phi(v - (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).x, u + x) = \phi(v, u + x) - \phi((\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).x, u + x) =$

$\phi(v, u + x) - (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).\phi(x, u + x) = \phi(v, u + x) - (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).(\phi(x, u) + \phi(x, x)) =$

$\phi(v, u + x) - \phi(u + x, v) = \phi(v, u) + \phi(v, x) - \phi(u, v) - \phi(x, v) = \phi(v, u) - \phi(u, v)$.

On a donc, en supposant l'équivalence réalisée : $\phi(u, v) = \phi(v, u)$.

Comme, dans tous les cas de figure, pour tout couple de vecteurs $(u, v)$ : $\phi(u, v) = \phi(v, u)$, alors $\phi$ est symétrique.

Conclusion : Si $\phi$ n'est pas alternée elle est nécessairement symétrique, les formes bilinéaires vérifiant l'équivalence donnée dans l'énoncé sont donc les formes bilinéaires alternées ou symétriques.