C) Fiche : Espaces vectoriels.

1) Définition d'un espace vectoriel.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des *scalaires*.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si et seulement si :

C'est un ensemble non vide muni de deux opérations, une loi interne notée : « + », et une loi externe notée : « . ».

Le couple $(E, +)$ est un groupe commutatif.

La loi externe vérifie les quatre propriétés suivantes, pour tout couple de vecteurs (u, v) et tout couple de scalaires (α, β) :

(i) : $1.u = u$;
(ii) : $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$;
(iii) : $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$;
(iv) : $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$.

2) Sous-espaces vectoriels.

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$\boxed{F \neq \varnothing \text{ et } (\forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \forall (u, v) \in F^2,\ u + v \in F \text{ et } \alpha.u \in F)}.$$

3) Familles génératrices. Définition de la dimension infinie.

Une famille G de vecteurs de E est dite génératrice si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire **finie** de vecteurs de G.

Si E possède une partie génératrice finie, on dit qu'il est de dimension finie ; dans le cas contraire on dit qu'il est de dimension infinie.

4) Familles libres.

Une famille L de vecteurs de E est dite libre si et seulement si :

$$\boxed{\forall \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset L,\ (\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \ldots + \alpha_n.u_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0)}.$$

- *Remarque* : En dimension finie il faut et il suffit que la condition soit vérifiée par toute la famille, tandis qu'en dimension infinie il faut que la condition s'applique à toutes les combinaisons linéaires finies.

5) Bases. Théorème d'existence.

Une famille B de vecteurs de E est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

B est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire **finie** d'éléments de B.

Théorème : Tout espace vectoriel possède une base. En dimension finie elles ont toutes le même nombre d'éléments, c'est ainsi ce nombre qui est défini comme étant la dimension de l'espace concerné.

Proposition : De toute famille génératrice d'un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ on peut extraire une base.

Théorème de la base incomplète : Toute famille libre peut être complétée par une autre famille libre (par exemple extraite d'une autre base) pour former une base de E.

6) Différentes propositions sur les nombres d'éléments des familles et leur nature en comparaison avec la dimension de l'espace.

La dimension du sous-espace vectoriel engendré par une famille A de vecteurs est appelé : le *rang* de cette famille. Le sous-espace vectoriel est noté $\mathrm{Vect}(A)$ et son rang $\mathrm{rg}(A)$.

Proposition : A finie est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Card}(A)$. En dimension finie, A est génératrice si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \dim(E)$.

Conséquences : En dimension finie, soit $n = \dim(E)$.

A est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Card}(A) = n$.

Une famille libre de n vecteurs est une base.
Une famille génératrice de n vecteurs est une base.
Une famille ayant moins (au sens strict) de n vecteurs n'est pas génératrice.
Une famille ayant plus (au sens strict) de n vecteurs n'est pas libre.

7) Définition et existence des supplémentaires.

Deux sous-espaces vectoriels F et F' de E sont *supplémentaires* si et seulement si : $F \oplus F' = E$ (somme directe ; rappel : $F + F' = \{u + u',\ u \in F \text{ et } u' \in F'\}$).

$\boxed{F \oplus F' = E \Leftrightarrow (F + F' = E \text{ et } F \cap F' = \{0_E\})}$.

$F \oplus F' = E \Leftrightarrow (\forall v \in E,\ \exists!\ u \in F \text{ et } \exists!\ u' \in F' \text{ tels que } v = u + u')$.

$F \oplus F' = E \Leftrightarrow (C \text{ base de } F \text{ et } C' \text{ base de } F' \Rightarrow C \cup C' \text{ base de } E)$

Proposition : Tout sous-espace vectoriel possède au moins un supplémentaire.

8) Applications linéaires.

Étant donnés deux espaces vectoriels E et F, $f : E \to F$ est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } \forall (u, v) \in E^2,\ f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$; l'ensemble des applications de E dans lui-même (endomorphismes) est noté plus simplement $\mathscr{L}(E)$. On distingue entre les différents types d'applications linéaires, selon que l'ensemble d'arrivée est E ou non, et selon qu'elles sont bijectives ou non :

	E et F quelconques	E = F
f quelconque	homomorphisme	endomorphisme
f bijective	isomorphisme	automorphisme

- *Remarque* : Les termes contenus dans ce tableau doivent en réalité êtres complétés par « *d'espace vectoriel* » qui dans ce chapitre est sous-entendu. Par exemple « *isomorphisme* » signifie ici : « *isomorphisme d'espace vectoriel* » car il en existe d'autres types, par exemple l'application $\mathcal{M}$ qui à une application linéaire f associe sa matrice $\mathcal{M}(f)$ dans la base canonique est en réalité un *isomorphisme d'algèbre* car une opération supplémentaire est conservée : $\mathcal{M}(f + g) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g)$, $\mathcal{M}(\alpha.f) = \alpha.\mathcal{M}(f)$ (où α est un scalaire), et en plus : $\mathcal{M}(f \circ g) = \mathcal{M}(f) \times \mathcal{M}(g)$.

9) Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel.

L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

En particulier l'image de E notée f(E) ou plus souvent : **Im(f)**. On appelle rang de f : **rg(f)** = dim(Im(f)).

De même, l'image réciproque du vecteur nul notée $f^{-1}(0_F)$ ou plus souvent **Ker(f)** et appelée : Noyau de f.

Théorème du rang (ou de la dimension) : $\boxed{\mathbf{rg(f) + dim(Ker(f)) = dim(E)}}$.

10) Injections, surjections, caractérisations.

$\boxed{\text{f est injective si et seulement si : } Ker(f) = \{O_E\}}$.

f est injective si et seulement si l'image d'une base de E est une famille libre de F (une base de E si f est un endomorphisme).

f est surjective si et seulement si : Im(f) = F.

f est surjective si et seulement si l'image d'une base de E est une partie génératrice de F.

$\boxed{\text{Si } \dim(E) = \dim(F) \text{ (finie) alors : } f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}}$.

11) Valeurs propres et vecteurs propres, sous-espace propres.

f étant un endomorphisme de E, λ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe un vecteur non nul u tel que $f(u) = \lambda.u$.

Étant donnée une valeur propre λ, u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si $f(u) = \lambda.u$. Par convention, on décide que le vecteur nul n'est pas un vecteur propre.

Proposition : L'ensemble des vecteurs propres associé à une valeur propre λ donnée, auquel on adjoint 0_E, est un sous-espace vectoriel appelé sous-espace propre associé à λ, et noté lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible : E_λ.

12) Cas particuliers des homothéties, projecteurs et symétries.

L'endomorphisme h est une homothétie si et seulement s'il existe un scalaire k appelé son rapport tel que pour tout vecteur u : $h(u) = k.u$. Il s'en suit que k est son unique valeur propre et que le sous-espace propre associé est E lui-même.

L'endomorphisme p est un projection si et seulement si $p \circ p = p$. Ou encore : si et seulement si les sous-espaces propres E_1 et E_0 sont supplémentaires (alors p est la projection sur E_1 parallèlement à E_0. On peut aussi remarquer que $E_1 = \mathrm{Inv}(f)$ et $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$).

L'endomorphisme s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = id_E$. Ou encore : si et seulement si les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont supplémentaires (alors s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}).

Proposition : s est une symétrie si et seulement si $p = (s + id_E)/2$ est un projecteur. De même p est un projecteur si et seulement si $\boxed{s = 2p - id_E}$ est une symétrie. (Avec en outre égalités respectives des sous-espace propres : $E_1(s) = E_1(p)$ et $E_{-1}(s) = E_0(p)$).

13) Matrice d'une application linéaire.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, E et F étant de dimensions finies : $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$, ainsi que $B = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E et $C = (i_1, i_2, ..., i_n)$ une base de F ; soit enfin la matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ayant n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, sa j-ième colonne étant la donnée de $f(e_j)$ dans la base C. Alors (en notant u_B le vecteur colonne des composantes de u dans la base B) :

$$\forall u \in E, \quad \boxed{f(u)_C = M.u_B}.$$

Dans les bases convenables : $M(f \circ g) = M(f).M(g)$. Si f bijective : $M(f^{-1}) = (M(f))^{-1}$.

Formules de changement de base : Soit P la matrice de passage dont les colonnes sont les composantes dans la base B de E des vecteurs de la base B'. Alors :

$$\boxed{u_{B'} = P^{-1}.u_B}.$$

Si f est un endomorphisme de E : $M(f)_{B'} = P^{-1}M(f)_B P$.

Deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables : M et M' semblables $\Leftrightarrow$ $\exists\, P$ inversible telle que $\boxed{M' = P^{-1}MP}$.

Si f est une application linéaire de E dans F où Q est la matrice de passage de la base C' de F donnée dans C, alors :

$$M(f)_{B'C'} = Q^{-1}M(f)_{BC}P.$$

Deux matrices qui représentent la même application linéaire sont dites équivalentes.

14) Méthode du pivot de Gauss.

On applique des transformations élémentaires à $\boxed{M|I}$ jusqu'à arriver à $\boxed{I|M^{-1}}$.

(On appelle *transformations élémentaires* : Échanger deux lignes, multiplier une ligne par un scalaire non nul, additionner à une ligne une autre ligne préalablement multipliée par un scalaire (ou une combinaison linéaire des autres lignes)).

S'il est impossible de terminer le processus alors la matrice n'est pas inversible ; le nombre de lignes non nulles de la matrice finale est ainsi égal au rang de la matrice initiale.

15) Résolution de $(f(u) = v)$ où f est une application linéaire, v donné et u le vecteur à déterminer.

Soit M la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique, U et V les matrices colonnes des vecteurs u et v dans cette même base. On peut alors résoudre $f(u) = v$ par la méthode du pivot de Gauss.

Si M est inversible, on applique des transformations élémentaires à $\boxed{M|V}$ jusqu'à arriver à $\boxed{I|M^{-1}V}$. Si c'est impossible on arrive à $\boxed{u = u_0 + \mathrm{Ker}(f)}$ où u_0 est une solution particulière de l'équation.

On peut ainsi écrire que la **solution générale** de l'équation **avec** second membre est **égale** à la somme d'une **solution particulière** de l'équation **avec** second membre **plus** la **solution générale** de l'équation **sans** second membre (équation homogène).

16) Applications bilinéaires, formes bilinéaires.

E_1, E_2 et F étant des espaces vectoriels, $f : E_1 \times E_2 \to F$ est bilinéaire si pour tout vecteur u_1 de E_1 et tout vecteur u_2 de E_2, les applications $f_1 : E_1 \to F$ et $f_2 : E_2 \to F$ définies par $f_1(u) = f(u, u_2)$ et $f_2(u) = f(u_2, u)$ sont linéaires.

f est symétrique si $E = E_1 = E_2$ et pour tout couple (u, v) de vecteurs de E :

$$f(v, u) = f(u, v).$$

f est **antisymétrique** si $E = E_1 = E_2$ et pour tout couple (u, v) de vecteurs de E :

$f(v, u) = -f(u, v)$.

(Par exemple le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique).

Lorsque l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{K}$, f est une *forme bilinéaire*. Une forme bilinéaire antisymétrique est aussi appelée : forme bilinéaire *alternée*.

Une forme bilinéaire symétrique est *positive* si pour tout vecteur u de E : $f(u, u) \geq 0$ (ce qui implique que c'est un réel) ; elle est *définie* si $(f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E)$.

Une forme bilinéaire symétrique est *non dégénérée* si les deux applications linéaires associées sont injectives. Elle est *dégénérée* s'il existe un vecteur non nul w tel que : $f(u, w)$ ou $f(w, u)$ est nul pour tout vecteur u. En particulier, une forme bilinéaire symétrique *définie* est non dégénérée (et une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée est définie).

Une forme bilinéaire symétrique définie positive est un produit scalaire.

17) Matrice d'une forme bilinéaire.

Soit B_1, B_2 les bases canoniques respectives de E_1, E_2, et f une forme bilinéaire. Il existe alors une matrice M telle que, en assimilant u_1, u_2 et $v = f(u_1, u_2)$ à leurs composantes dans ces bases, on a : $\boxed{v = {}^tu_1.M.u_2}$.

Si $E = E_1 = E_2$ et $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$: $M = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \dots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \dots & f(e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \dots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}$.

Dans ce dernier cas, si f est symétrique alors M est symétrique et si f est antisymétrique alors M est antisymétrique.

Formule de changement de base : Si P est la matrice de passage de la base B' donnée dans la base B, alors : $\boxed{M' = {}^tPMP}$ (où M et M' sont les matrices respectives de f dans B et dans B').

- *Remarque* : Il existe des matrices appelées *matrices orthogonales* telles que ${}^tP = P^{-1}$; exclusivement dans ce cas la formule de changement de base de l'endomorphisme de matrice M et la formule de changement de base de la forme bilinéaire de matrice M coïncident.

18) Propriétés de la trace d'une matrice.

Si M est une matrice carrée, sa trace : $Tr(M)$ désigne la somme des coefficients de la diagonale principale de M. Alors :

Transposition : $Tr({}^tA) = Tr(A)$.

Linéarité : $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$; $Tr(\alpha.A) = \alpha.Tr(A)$ (où α est un scalaire).

Produit : $Tr(AB) = Tr(BA)$. *Conséquence* : A et B semblables $\Rightarrow$ $Tr(A) = Tr(B)$.

$(A, B) \mapsto Tr({}^tA.B)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive (produit scalaire).