C) TD : Espaces vectoriels.

C1.1) Soit F l'ensemble des applications dérivables de $E = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle réel contenant 0. Montrer que c'est un espace vectoriel. Soit U le sous-ensemble de E constitué des éléments f de F tels que : $f(0) = f'(0) = 0$; montrer que c'est un sous-espace vectoriel. Peut-on en donner un supplémentaire dans F ?

C1.2) Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

C1.3) Si E est un espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2, montrer que si U et V sont des hyperplans de E distincts, alors $U + V = E$. Quelle est la dimension de $U \cap V$?

C1.4) Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $F = \{f \in E,\ f(x) = a.\cos(x) + b.\sin(x) + c$, où a, b et c sont des réels$\}$. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie. Soit ϕ et ψ des applications de F dans E définies par :

$$\phi(P) = Q \text{ avec } Q(x) = P(x - \pi/2) \ ;\ \psi(P) = R \text{ avec } R(x) = P'(x).$$

Montrer que ce sont des endomorphismes de F ; comparer $\phi\circ\psi$ et $\psi\circ\phi$.

C1.5) Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $E_n = \mathbb{K}_n[X]$ (n entier naturel non nul fixé), et soit B un polynôme non nul de E ; montrer que l'ensemble F des polynômes P tels que $B|P$ (B divise P) est un sous-espace vectoriel de E. Trouver un supplémentaire F' de $F\cap E_n$ dans E_n, et donner $\dim(F')$. (Distinguer les cas où $d°(P) > n$ et $d°(P) \leq n$, puis utiliser la division euclidienne).

C2.1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un scalaire λ tel que, pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(f - \lambda id_E)$ soit linéaire ; montrer qu'alors f est linéaire.

C2.2) Soit E un espace de dimension 3, et f un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ tel que f^3 est l'application nulle, mais f^2 en est distinct. Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $B = (u, f(u), f^2(u))$ soit une base de E. Donner la matrice de f dans cette base. Généraliser ce résultat à $\dim(E) = n$, puis montrer que si f est nilpotent d'ordre p alors $p \leq n$.

C2.3) Soit p et q deux projecteurs sur un espace vectoriel E ; montrer que : $p\circ q + q\circ p = \Theta \Leftrightarrow p\circ q = q\circ p = \Theta$ (endomorphisme nul). En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur. Dans ce dernier cas, exprimer le noyau de $p + q$ en fonction des noyaux de p et q, ainsi que son image en fonction des images de p et q. (Composer à gauche ou à droite par p ou q).

C2.4) Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ de l'ensemble des réels dans lui-même. Soit ϕ et ψ les applications définies sur E par : $\phi(f) = g \Rightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt$; $\psi(f) = g \Rightarrow g(x) = f'(x)$. Montrer que ϕ et ψ sont linéaires ; comparer $\phi\circ\psi$ et $\psi\circ\phi$. Étudier $id_E - \phi$ et $id_E - \psi$; donner leurs noyaux. Soit $f = (x \mapsto \cos(x))$, qui est un élément de E, donner l'image réciproque de f par $id_E - \psi$.

C2.5) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, muni de sa base canonique usuelle $B = (1, X, ..., X^n)$, et f l'application définie sur E par : $f(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$. Montrer qu'elle arrive bien dans E, puis que c'est un endomorphisme et donner sa matrice dans B. Montrer que si n est impair alors f est bijective et que si n est pair alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1 - X^2)^{n/2})$. Soit $\phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} (f(P)f(Q))(k)$; montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique positive. Est-elle définie ou non dégénérée ?

C2.6) Soit E un espace de dimension 3, soit f un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ tel que : $f^2 + f - 2id_E = 0$ (l'application nulle). Montrer que f admet une base de vecteurs propres. En déduire les solutions de cette équation. (Montrer que $Ker(f - id_E)$ et $Ker(f + 2id_E)$ sont supplémentaires).

C3.1) Si E est de dimension 3, soit les vecteurs u, v, w donnés dans la base canonique par : $u:\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $v:\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, et $w:\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Donner la matrice dans la base canonique de la projection p sur le plan $Vect(u, v)$ de direction la droite dirigée par w. (Utiliser la méthode du pivot).

C3.2) Si E est de dimension 3, donner la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport au plan d'équation : $(x + y + z = 0)$, de direction la droite d'équations : $\{x - y + z = 0,\ 3x + y - 2z = 0\}$. (Utiliser la méthode du pivot).

C3.3) Donner l'image et le noyau de f dont la matrice dans les bases canoniques est : $\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2 & -1\\0 & 1 & -1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & -m\end{pmatrix}$, où m est un réel fixé ($f \in \mathscr{L}(E, F)$).

C3.4) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, A et B deux polynômes à coefficients réels et a un réel fixé tel que $A(a) \neq -1$. Déterminer l'ensemble F défini par : $F = \{P \in E,\ P + P(a).A = B\}$. (Soit $f(P) = P + P(a).A$, montrer que f est linéaire, puis exprimer $(f - id_E)^2$ en fonction de $f - id_E$, en déduire qu'il existe une fonction g telle que $f_o g = (1 + A(a)).id_E$). Traiter le cas particulier $A(a) = -1$.

C3.5) Soit f un endomorphisme quelconque de E. Si f vérifie : $Ker(f) = Ker(f^2)$, montrer que l'on a alors : $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$. Étudier le cas particulier de la dimension finie. Si f vérifie : $Im(f) = Im(f^2)$, montrer que : $Ker(f) + Im(f) = E$. Étudier le cas particulier de la dimension finie.

C4.1) Résoudre, m étant un réel fixé : *a*) $\begin{cases} x + y - mz = 0\\ (m + 1)x + 2y - 2z = 0\\ x + (m + 1)y + z = 0\end{cases}$; *b*) $\begin{cases} mx + y + z = 1\\ x + my + z = m^2\\ x + y + mz = m^2\end{cases}$.

C4.2) Soit M la matrice d'ordre 4 ayant tous ses termes égaux à 1, sauf sa diagonale dont les éléments sont nuls. Est-elle inversible ?

C4.3) *a*) A et B étant des matrices carrées données de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: $X = tr(X).A + B$.

b) A étant une matrice carrée donnée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: $X + {}^tX = tr(X).A$.

C4.4) Déterminer le rang et éventuellement l'inverse de : *a*) $\begin{pmatrix}1 & -i & -i & 1\\ i & 1 & 1 & i\\ 1 & i & 3i & 3\end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix}1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a)\\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a)\\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a)\\ \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) & \cos(6a)\end{pmatrix}$.

C4.5) Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables : $\begin{pmatrix}4-a & 1 & -1\\ -6 & -1-a & 2\\ 2 & 1 & 1-a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1-a & 1 & 0\\ 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2-a\end{pmatrix}$.

C.5.1) Soit $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ des matrices carrées d'ordre n ; montrer que :

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{11}.B_{11} + A_{12}.B_{21} & A_{11}.B_{12} + A_{12}.B_{22}\\ A_{21}.B_{11} + A_{22}.B_{21} & A_{21}.B_{12} + A_{22}.B_{22}\end{pmatrix}.$$

C5.2) Si E est de dimension 2 soit, pour $u:\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $v:\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$: $f(u, v) = 33x_1y_1 - 14(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2$. Écrire la matrice de f dans la base canonique $B = (e_1, e_2)$. Montrer que la famille $B' = (e'_1, e'_2)$, pour : $e'_1 = e_1 + 2e_2$, et : $e'_2 = 2e_1 + 5e_2$, est une base de E ; exprimer f dans la base B' et donner sa matrice. (Ce n'est pas $P^{-1}MP$).

C5.3) Soit $E = \mathbb{K}_2[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2)$. Soit f définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par : $f(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Montrer que f est une forme bilinéaire non dégénérée, et donner sa matrice dans B.

C5.4) Soit ϕ une forme bilinéaire sur E telle que : $\phi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$, et f une application de E dans lui-même telle que pour tout couple de vecteurs u et v de E on ait : $\phi(f(u), f(v)) = \phi(u, v)$. Montrer que f est un endomorphisme injectif.

C5.5) Soit ϕ une forme bilinéaire sur E telle que, pour tout couple (u, v) de vecteurs, on ait l'équivalence : $\phi(u, v) = 0 \Leftrightarrow \phi(v, u) = 0$. Montrer que ϕ est symétrique ou alternée.
(ϕ est alternée ou non, auquel cas il existe x tel que $\phi(x, x) \neq 0$, développer alors $\phi(x, u - (\phi(x, u)/\phi(x, x)).x)$ et utiliser une des propriétés de ϕ. Ensuite, pour $\phi(u, x) \neq 0$, utiliser $\phi(u, v - (\phi(u, v)/\phi(u, x)).x)$. Enfin, pour $\phi(u, x) = 0$, utiliser $\phi(u + x, v - (\phi(u + x, v)/\phi(x, x)).x)$).