

D1) TD : Espaces préhilbertiens (première partie).

D1.1) Montrer que, pour $(u, v) \in E^2$ (E espace préhilbertien réel) :

$$u \text{ et } v \text{ colinéaires et de même sens} \Leftrightarrow (u|v) = \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow \|u + v\| = \|u\| + \|v\|.$$

$$u \text{ et } v \text{ colinéaires et de sens contraires} \Leftrightarrow (u|v) = -\|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow \|u - v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u + v\| = \left| \|u\| - \|v\| \right|.$$

- *Corrigé* : La première équivalence de chaque proposition est démontrée dans le cours.

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow (u + v)^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (u|v) = \|u\| \cdot \|v\|.$$

$$u \text{ et } v \text{ colinéaires et de sens contraires} \Leftrightarrow u \text{ et } -v \text{ colinéaires et de même sens} \Leftrightarrow \|u + (-v)\| = \|u\| + \|-v\|.$$

$$\|u + v\| = \left| \|u\| - \|v\| \right| \Leftrightarrow (u + v)^2 = (\|u\| - \|v\|)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (u|v) = -\|u\| \cdot \|v\|.$$

D1.2) Soit u un vecteur fixé non nul, un réel α , et f définie pour tout vecteur $x \in E$ par : $f(x) = x - \alpha(x|u) \cdot u$; trouver α pour que : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y)$.

$$\text{- Corrigé : } (f(x)|f(y)) = (x - \alpha(x|u) \cdot u | y - \alpha(y|u) \cdot u) = (x|y) - (x|\alpha(y|u) \cdot u) - (\alpha(x|u) \cdot u | y) + (\alpha(x|u) \cdot u | \alpha(y|u) \cdot u) = (x|y) - \alpha(y|u) \cdot (x|u) - \alpha(x|u) \cdot (u|y) + \alpha^2(x|u)(y|u) \cdot (u|u) = (x|y) - 2\alpha(x|u)(y|u) + \alpha^2(x|u)(y|u) \cdot (u|u). \text{ Donc :}$$

$$(f(x)|f(y)) = (x|y) \Leftrightarrow -2\alpha(x|u)(y|u) + \alpha^2(x|u)(y|u) \cdot (u|u) = \alpha(x|u)(y|u) \cdot (\alpha(u|u) - 2) = 0.$$

1^{er} cas : Si $\alpha = 0$, alors $f(x) = x$, la fonction identique est solution du problème.

2^{ème} cas : Si $\alpha = 2/u^2$, en notant $u' = u/\|u\|$ unitaire, alors $f(x) = x - 2(x|u') \cdot u'$. On reconnaît la formule de la projection orthogonale. En notant p la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)$, alors $p(x) = (x|u') \cdot u'$, et on a donc : $f = \text{id}_E - 2p = -s$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(u)$.

D1.3) Soit E un espace euclidien de dimension 4, muni de la base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$; donner la matrice du projecteur orthogonal sur $F = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + 2e_4)$, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4)$.

- *Corrigé* : On applique la formule de la projection orthogonale, en notant p le projecteur et s la symétrie :

$$p(u) = \frac{1}{2} \cdot (u|e_1 + e_3) \cdot (e_1 + e_3) + \frac{1}{5} \cdot (u|e_2 + 2e_4) \cdot (e_2 + 2e_4). \text{ (C'est possible car les vecteurs donnés dans l'énoncé sont orthogonaux).}$$

$$u \text{ étant donné dans } B \text{ par : } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{ alors : } p(u) = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot (x_2 + 2x_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_3)/2 \\ (x_2 + 2x_4)/5 \\ (x_1 + x_3)/2 \\ 2(x_2 + 2x_4)/5 \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$M_p = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 2/5 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même : } s(u) = 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot (u|(e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4)) \cdot (e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4) - u = \frac{2}{7} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$s(u) = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \end{pmatrix}, \text{ d'où : } M_s = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

D1.4) Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $[0, 1]$. Vérifier que l'application : $(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ est bien un produit scalaire. Donner la norme des vecteurs $u = (x \mapsto x \cdot \ln(x))$ et $v = (x \mapsto x)$.

Calculer $\inf\{\int_0^1 (x \cdot \ln(x) - ax^2 - bx)^2 dx, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. (Pour $p \geq 0$ et $q \geq 1$: $\int_0^1 x^p \cdot \ln^q(x) dx = (-q/(p+1)) \cdot \int_0^1 x^p \cdot \ln^{q-1}(x) dx$).

- *Corrigé* : La bilinéarité vient de la linéarité de l'intégrale. Cette forme bilinéaire est positive car $f(P, P)$ est l'intégrale d'un carré. Il est simple de montrer qu'elle est définie car : Si l'intégrale d'une fonction positive est nulle sur un segment, ça signifie que la fonction est nulle sur ce segment. (Cf. ex. C5.3).

On utilise tout au long de l'exercice la propriété donnée en indication, démontrée avec une intégration par partie :

$$\text{Pour } p \geq 0 \text{ et } q \geq 1 : \int_0^1 x^p \cdot \ln^q(x) dx = (-q/(p+1)) \cdot \int_0^1 x^p \cdot \ln^{q-1}(x) dx.$$

En remarquant au passage qu'on prolonge la fonction $(x \mapsto x^p \cdot \ln^q(x))$ en zéro.

$$\|u\|^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \ln^2(x) dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 x^2 \cdot \ln(x) dx = -\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx) = \frac{2}{9} \cdot [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{27} \Rightarrow \|u\| = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

$$\|v\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \|v\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

• $\inf\{\int_0^1 (x \cdot \ln(x) - ax^2 - bx)^2 dx, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \inf\{\|x \cdot \ln(x) - ax^2 - bx\|^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = d(u, \text{Vect}(v, w))^2$, où :
 $w = (x \mapsto x^2)$.

Soit p la projection orthogonale sur $\text{Vect}(v, w)$; alors : $d(u, \text{Vect}(v, w))^2 = \|u - p(u)\|^2$.

Malheureusement, v et w ne sont pas orthogonaux et on ne peut donc pas appliquer la formule de la projection ; il faut orthonormaliser (v, w) avec le procédé de Schmidt :

$$v' = v/\|v\| = \sqrt{3} \cdot u ; w' = w + \lambda \cdot v \text{ avec } (v|w) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda = -3/4. \text{ Alors, } w' = w'/\|w'\| = 4\sqrt{5} \cdot w''.$$

Enfinement : $v' = (x \mapsto \sqrt{3}x)$, $w' = (x \mapsto 4\sqrt{5}(x^2 - x))$. Alors : $\|u - p(u)\|^2 = \|u - ((u|v') \cdot v' + (u|w') \cdot w')\|^2$.

$$\|u - p(u)\|^2 = \|x \cdot \ln(x) - \frac{5x^2}{3} + \frac{19x}{12}\|^2 = \int_0^1 (x \cdot \ln(x) - \frac{5x^2}{3} + \frac{19x}{12})^2 dx = \dots = \frac{1}{432}.$$

- *Autre méthode* : Cette méthode nécessite de connaître la théorie des extrema développée au chapitre E :

$$\text{Soit } \phi(a, b) = \int_0^1 x^2 (\ln(x) - ax - b)^2 dx = \frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{a}{8} + \frac{2b}{9} + \frac{2}{27}.$$

Le minimum, s'il existe, est atteint en un point critique vérifiant : $\frac{\partial \phi}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial \phi}{\partial b}(a, b) = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{2a}{5} + \frac{b}{2} + \frac{1}{8} = \frac{a}{2} + \frac{2b}{3} + \frac{2}{9} = 0. \text{ La solution de ce système est unique et vaut : } a = \frac{5}{3}, b = \frac{-19}{12}. \text{ Ainsi : } \phi(\frac{5}{3}, \frac{-19}{12}) = \frac{1}{432}.$$

Il reste à vérifier que c'est bien un minimum : $R = \frac{\partial^2 \phi}{\partial a^2} = \frac{2}{5}$, $S = \frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial b} = \frac{1}{2}$, $T = \frac{\partial^2 \phi}{\partial b^2} = \frac{2}{3}$; $\Delta = S^2 - RT = \frac{-1}{60}$. Comme $\Delta < 0$ et $R > 0$, c'est bien un minimum.

D1.5) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; vérifier que l'application $(M|N) = \text{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire. Donner la norme de la matrice identité, et de la matrice $N = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $a_{i,j} = i + j$ (utiliser les formules de la somme des carrés et de la somme des cubes). Calculer ensuite les minimums : $\inf\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{i,j} - i - j), \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\}$ où \mathcal{A} est l'ensemble de E des matrices antisymétriques, et $\inf\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{i,j} - i - j)^2, \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\}$. (Montrer que les matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonales pour ce produit scalaire).

- *Corrigé* : La linéarité de la trace implique la bilinéarité de cette application ; par ailleurs : $\text{Tr}({}^tA) = \text{Tr}(A)$, donc : $(M|N) = \text{Tr}({}^tMN) = \text{Tr}({}^t({}^tMN)) = \text{Tr}({}^tNM) = (N|M)$, elle est donc symétrique.

• Positive : Pour $M = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $(M|M) = \text{Tr}({}^tMM) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$, qui est bien positive.

• Définie : Comme c'est une somme de carrés : $(M|M) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{i,j} = 0$ pour tous les $i, j \Leftrightarrow M = 0$. Elle est bien définie.

C'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est donc effectivement un produit scalaire.

$$\|I\|^2 = \text{Tr}({}^tII) = \text{Tr}(I) = n, \text{ donc : } \|I\| = \sqrt{n}.$$

$$\|N\|^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i,j} (i + j)^2 = \sum_{i,j} (i^2 + 2ij + j^2) = \sum_i \sum_j i^2 + \sum_i \sum_j j^2 + 2 \sum_i \sum_j ij = 2n \cdot \sum_i i^2 + 2(\sum_i i)(\sum_j j) = 2n \cdot \sum_i i^2 + 2(\sum_i i)^2 =$$

$$\|N\|^2 = 2n \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = n^2(n+1) \cdot \left(\frac{2n+1}{3} + \frac{n+1}{2}\right) = \dots = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$$

(Une petite curiosité au passage : $\sum_{i,j} ij = \sum_i i^3$).

On démontre d'abord l'indication, en notant \mathcal{S} l'ensemble des matrices symétriques. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $S \in \mathcal{A}$: $(A|S) = \text{Tr}({}^tAS) = -\text{Tr}(AS)$, et $(S|A) = \text{Tr}({}^tSA) = \text{Tr}(SA) = \text{Tr}(AS) = -(A|S)$, d'où l'on déduit : $(A|S) = 0$, et, par suite : $\mathcal{A} \perp \mathcal{S}$. Ce sont donc des supplémentaires orthogonaux : $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.

$$\begin{aligned} & \bullet \inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{i,j} - i - j), \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} = \inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_{i,j} - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i + j), \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} = \\ & \inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_{i,j} - \left(\sum_j \sum_i i + \sum_i \sum_j j\right), \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} = \inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_{i,j} - 2n(\sum_i i), \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} = \\ & \inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_{i,j} - 2n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right), \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} = \inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_{i,j}, \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} - n^2(n+1). \end{aligned}$$

La somme des coefficients d'une matrice antisymétrique est évidemment nulle, donc :

$$\inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{i,j} - i - j), \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} = -n^2(n+1).$$

$$\begin{aligned} & \bullet \inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{i,j} - i - j)^2, \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} = d(N, \mathcal{A})^2 ; \text{ d'où, en notant } p \text{ la projection orthogonale sur } \mathcal{A} : \\ & \inf\left\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{i,j} - i - j)^2, \text{ avec } (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\right\} = \|N - p(N)\|^2 = \|N\|^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6} \text{ car } p(N) = 0 \text{ vu que } N \text{ est} \\ & \text{symétrique : } N \in \mathcal{S} \perp \mathcal{A}. \end{aligned}$$