

D2) TD : Espaces préhilbertiens (deuxième partie).

D2.1) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base canonique B , et la famille de vecteurs (u, v, w) de coordonnées respectives dans B : $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 1, 0)$. Montrer que cette famille est une base et trouver, si c'est possible, un produit scalaire sur E tel que cette famille soit une base orthonormale pour ce produit scalaire.

- *Corrigé* : Au chapitre G on verra qu'il suffit de calculer leur déterminant, mais là il faut faire autrement :

$x.u + y.v + z.w = 0 \Leftrightarrow \{x + y - z = 0, 2x + z = 0, x + y = 0\}$; des deux dernières on tire $y = -x$ et $z = -2x$ qu'on remplace dans la première : $2x = 0$, donc $x = y = z = 0$. C'est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est donc bien une base.

On cherche une matrice M telle que, en notant U, V, W les colonnes respectives des coordonnées de u, v, w dans B , alors : ${}^tUMU = {}^tVMV = {}^tWMW = 1$, et : ${}^tUMV = {}^tUMW = {}^tVMW = 0$.

On poserait ainsi $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$, et on obtiendrait des équations à neuf inconnues (six en tenant compte de la symétrie).

Mais il y a plus simple : En notant $P = (U \ V \ W)$, alors ${}^tPMP = I$, donc : $M = {}^tP^{-1}P^{-1} = (P^tP)^{-1}$. Ainsi :

$$M = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dots = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

D2.2) a) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Montrer que l'application définie par : $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ (qu'on notera ensuite $(P|Q)$) est un produit scalaire. Donner une base orthonormale de E pour ce produit scalaire dans le cas où $n = 2$.

b) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$; l'application : $(P, Q) \mapsto (P(-1)Q(-1) + 2P(0)Q(0) + P(1)Q(1))/4$ est-elle un produit scalaire ? Si oui donner une base orthonormale.

c) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et l'application : $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{\sup\{d^o(P), d^o(Q)\}} P(k)Q(k)$; mêmes questions (Tester l'exemple $f(P_1 + P_2, Q)$ avec $P_1(X) = 1 + X^2$, $P_2(X) = 1 - X^2$ et $Q(X) = X$).

d) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n , la série $\sum_k k^n/k!$ converge (hypothèse de récurrence : le rayon de convergence de $\sum_k \frac{k^n x^k}{k!}$ est infini). En déduire que pour tout polynôme P : $\sum_k P(k)/k!$ converge. L'application : $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)Q(k)}{k!}$ est-elle un produit scalaire ?

- *Corrigé* : a) (cf. ex. C5.3 et D1.4) La bilinéarité vient de la linéarité de l'intégrale. Cette forme bilinéaire est positive car $(P|P)$ est l'intégrale d'un carré. Il est simple de montrer qu'elle est définie : Si l'intégrale d'une fonction positive est nulle sur un segment, ça signifie que la fonction est nulle sur ce segment. Or, si un polynôme est nul sur un segment, ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

C'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est donc bien un produit scalaire.

On applique ensuite le procédé d'orthonormalisation de Schmidt : $(1|1) = 1$, le polynôme constant 1 est déjà unitaire.

Soit $e_2 = X + \lambda$; alors : $(X + \lambda|1) = \frac{1}{2} + \lambda = 0$, d'où l'on déduit $\lambda = -\frac{1}{2}$;

$(X - \frac{1}{2}|X - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, le polynôme $2\sqrt{3} \cdot (X - \frac{1}{2}) = 2\sqrt{3} \cdot X - \sqrt{3}$ est donc unitaire et orthogonal à 1 .

Soit $e_3 = X^2 + \lambda X + \mu$; alors : $(X^2 + \lambda X + \mu|1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\lambda + \mu = 0$, et : $(X^2 + \lambda X + \mu|X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{2}\mu = 0$, d'où l'on déduit : $\mu = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda = 0$, donc : $\lambda = -1$, $\mu = \frac{1}{6}$.

$(X^2 - X + \frac{1}{6}|X^2 - X + \frac{1}{6}) = \frac{1}{180}$; donc : $6\sqrt{5} \cdot X^2 - 6\sqrt{5} \cdot X + \sqrt{5}$ est unitaire et orthogonal aux deux précédents. La

base cherchée est : $(1, 2\sqrt{3} \cdot X - \sqrt{3}, 6\sqrt{5} \cdot X^2 - 6\sqrt{5} \cdot X + \sqrt{5})$.

- *Remarque* : On peut calculer $(e_2|e_3)$ à la place de $(X|e_3)$, et ce qu'on perd dans ce calcul est gagné ensuite car on obtient directement la valeur de λ .

b) La bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates.

$(P|P) = 0 \Leftrightarrow P(-1) = P(0) = P(1) = 0$; un polynôme de degré deux ayant trois racines est nul, cette forme bilinéaire est donc bien définie. Par suite, c'est effectivement un produit scalaire.

On applique ensuite le procédé d'orthonormalisation de Schmidt : $(1|1) = 1$, le polynôme constant 1 est déjà unitaire.

Soit $e_2 = X + \lambda$; alors : $(X + \lambda|1) = \lambda = 0$; $(X|X) = \frac{1}{2}$, le polynôme $\sqrt{2} \cdot X$ est donc unitaire et orthogonal à 1.

Soit $e_3 = X^2 + \lambda X + \mu$; alors : $(X^2 + \lambda X + \mu|1) = \frac{1}{2} + \mu = 0$, donc $\mu = -\frac{1}{2}$, et $(X^2 + \lambda X - \frac{1}{2}|X) = \frac{1}{2}\lambda = 0$.

$(X^2 - \frac{1}{2}|X^2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, d'où : $2X^2 - 1$ est unitaire et orthogonal aux deux précédents. La base cherchée est : $(1, \sqrt{2} \cdot X, 2X^2 - 1)$.

c) On teste : $f(P_1 + P_2, Q)$ avec $P_1(X) = 1 + X^2$, $P_2(X) = 1 - X^2$ et $Q(X) = X$; on obtient :

$$f(P_1 + P_2, Q) = f(2, X) = \sum_{k=0}^1 2 \cdot Q(k) = 2(Q(0) + Q(1)) = 2.$$

$$f(P_1, Q) + f(P_2, Q) = f(1 - X^2, X) + f(1 + X^2, X) = \sum_{k=0}^2 P_1(k) \cdot Q(k) + \sum_{k=0}^2 P_2(k) \cdot Q(k) =$$

$$P_1(0) \cdot Q(0) + P_1(1) \cdot Q(1) + P_1(2) \cdot Q(2) + P_2(0) \cdot Q(0) + P_2(1) \cdot Q(1) + P_2(2) \cdot Q(2) = 0 + 2 + 10 + 0 + 0 - 6 = 4.$$

Comme il y a un contre exemple tel que : $f(P_1 + P_2, Q) \neq f(P_1, Q) + f(P_2, Q)$, ce n'est pas une forme bilinéaire.

d) Si $n = 0$: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$ converge pour tout x . On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n ; alors la série $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n x^k}{k!}$ converge pour tout x . Il en résulte que f est dérivable et que la série dérivée de f converge pour tout x : $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{n+1} x^{k-1}}{k!}$. Par suite, la série de $x \cdot f'(x)$ converge pour tout x : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{n+1} x^k}{k!}$; la propriété étant démontrée au rang $n + 1$, elle est donc toujours vraie.

Pour $x = 1$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ converge.

Soit $P(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n$, où $d = d^\circ(P)$; alors : $\sum_{n=0}^d a_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = \sum_{n=0}^d \sum_{k=0}^{\infty} a_n \frac{k^n}{k!}$ converge, tandis que : $\sum_{k=0}^{\infty} P(k)/k! = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^d a_n \frac{k^n}{k!}$.

On peut échanger les deux Σ , car seul l'un des deux est une limite ; en notant $u_N(n) = \sum_{k=0}^N a_n \frac{k^n}{k!}$, alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^d u_N(n) = \sum_{n=0}^d \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(n). \text{ Par conséquent : } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)}{k!} \text{ converge.}$$

Soit : $(P|Q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)Q(k)}{k!}$; avec les théorèmes sur les limites, dont la limite de la somme et la limite d'une suite

multipliée par un scalaire, on démontre la bilinéarité, suite à quoi la symétrie et la positivité sont évidentes.

Cette forme bilinéaire est définie car une série numérique dont le terme général est positif ne peut être nulle que si son terme général est toujours nul, ainsi : $(P|P) = 0 \Rightarrow P(k) = 0$ pour tout k ; le polynôme P doit donc être nul car il admet une infinité de racines.

C'est bien un produit scalaire.

D2.3) a) Si E est euclidien, montrer qu'une application $f : E \rightarrow E$ telle que pour tout couple de vecteurs (x, y) : $(x|f(y)) = (f(x)|y)$ est linéaire (endomorphisme symétrique). Montrer qu'un projecteur orthogonal vérifie cette propriété (un projecteur orthogonal est donc un endomorphisme symétrique).

b) Pour E euclidien, montrer que toute application $f : E \rightarrow E$ telle que pour tout couple de vecteurs (x, y) : $(x|f(y)) = -(f(x)|y)$ est linéaire (endomorphisme antisymétrique) ; montrer que f^2 est symétrique, et : $(f^2(x)|x) \leq 0$, $(f(x)|x) = 0$.

c) Soit un espace euclidien E et une application $f : E \rightarrow E$. Montrer l'équivalence suivante :

$$((\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|) \text{ et } (f(0_E) = 0_E)) \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y)).$$

En déduire qu'elle est linéaire, puis bijective.

- *Corrigé* : a) $(f(\alpha \cdot x)|y) = (\alpha \cdot x|f(y)) = \alpha \cdot (x|f(y)) = \alpha \cdot (f(x)|y) = (\alpha \cdot f(x)|y)$. Donc :

$\forall y, (f(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot f(x)|y) = 0$, ce qui signifie $f(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot f(x) = 0_E$ car le produit scalaire est non dégénéré.

De même : $(f(x_1 + x_2)|y) = (x_1 + x_2|f(y)) = (x_1|f(y)) + (x_2|f(y)) = (f(x_1)|y) + (f(x_2)|y) = (f(x_1) + f(x_2)|y)$. Donc :

$\forall y, (f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)|y) = 0$, ce qui signifie $f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) = 0_E$ pour la même raison.

Il en résulte que f est linéaire.

Soit p la projection orthogonale sur F ; $\forall (u, v) \in E^2, \exists!(u_1, v_1, u_2, v_2) \in F^2 \times (F^\perp)^2, u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$. Alors : $(p(u)|v) = (u_1|v_1 + v_2) = (u_1|v_1) + (u_1|v_2) = (u_1|v_1) = (u_1|v_1) + (u_2|v_1) = (u_1 + u_2|v_1) = (u|p(v))$.

b) On procède de même : $(f(\alpha \cdot x)|y) = -(\alpha \cdot x|f(y)) = -\alpha \cdot (x|f(y)) = \alpha \cdot (f(x)|y) = (\alpha \cdot f(x)|y)$. Donc :

$\forall y, (f(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot f(x)|y) = 0$, ce qui signifie $f(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot f(x) = 0_E$ car le produit scalaire est non dégénéré.

De même : $(f(x_1 + x_2)|y) = -(x_1 + x_2|f(y)) = -(x_1|f(y)) - (x_2|f(y)) = (f(x_1)|y) + (f(x_2)|y) = (f(x_1) + f(x_2)|y)$. Donc :

$\forall y, (f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)|y) = 0$, ce qui signifie $f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) = 0_E$ pour la même raison.

Il en résulte que f est linéaire.

Par ailleurs : $(x|f^2(y)) = -(f(x)|f(y)) = (f^2(x)|y)$ donc f^2 est symétrique.

En outre : $(f^2(x)|x) = -(f(x)|f(x)) \leq 0$ (l'opposé d'un carré scalaire), et : $(f(x)|x) = -(x|f(x)) = -(f(x)|x)$ (car le produit scalaire est symétrique) ; donc : $(f(x)|x) = 0$.

c) Il faut montrer les deux implications.

① \Rightarrow : On suppose ainsi : $(\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|)$ et $(f(0_E) = 0_E)$; alors $\|f(x) - f(0_E)\| = \|x - 0_E\|$, donc : $\|f(x)\| = \|x\|$.

Par ailleurs : $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2$, c'est-à-dire :

$(f(x) - f(y)|f(x) - f(y)) = (x - y|x - y)$, en développant : $f(x)^2 - 2(f(x)|f(y)) + f(y)^2 = x^2 - 2(x|y) + y^2$; et comme $f(x)^2 = x^2$ et $f(y)^2 = y^2$, on en déduit bien : $(f(x)|f(y)) = (x|y)$.

② \Leftarrow : On suppose ici : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y)$; alors : $(f(0_E)|f(0_E)) = (0_E|0_E) = 0$, donc $f(0_E) = 0_E$.

Par ailleurs : $(f(x - y)|f(x - y)) = (x - y|x - y)$, donc : $\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2$, c'est-à-dire : $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

L'équivalence est donc vraie.

D2.4) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et d'une base orthonormale directe $B = (e_1, e_2, e_3)$ (c'est-à-dire que $e_3 = e_1 \wedge e_2$), et (u, v) un couple de vecteurs fixés non colinéaires et non orthogonaux. L'application f qui à tout couple de vecteurs (x, y) associe : $((x \wedge u)|(y \wedge u))$ est-elle un produit scalaire ? Même question avec $((x \wedge u)|(y \wedge u)) + ((x \wedge v)|(y \wedge v))$. Même question avec $((x|u) \cdot x|(y|v) \cdot y)$, puis avec $((x|u) \cdot u|(y|v) \cdot v)$. Soit s la symétrie par rapport à $\text{Vect}(u)$ parallèlement à u^\perp (symétrie orthogonale), même question avec $(s(x)|s(y))$. Soit s' la symétrie par rapport à $\text{Vect}(u)$ parallèlement à $\text{Vect}(v, (u, v)^\perp)$, même question avec $(s'(x)|s'(y))$.

- Pour les produits scalaires, donner une base orthonormale.

- **Corrigé** : • Soit $\phi(x, y) = ((x \wedge u)|(y \wedge u))$; la bilinéarité la symétrie et la positivité sont assez évidentes, mais elle n'est pas définie car : $\phi(u, u) = 0$.

• Soit $\phi(x, y) = ((x \wedge u)|(y \wedge u)) + ((x \wedge v)|(y \wedge v))$; la bilinéarité la symétrie et la positivité sont encore assez évidentes. Soit x tel que : $\phi(x, x) = 0$; comme c'est une somme de carré : $((x \wedge u)|(x \wedge u)) + ((x \wedge v)|(x \wedge v)) = 0$. Alors : $x \wedge u = x \wedge v = 0_E$, donc x est à la fois colinéaire à u et v , ce qui n'est possible que si $x = 0_E$ car u et v ne sont pas colinéaires. Étant aussi définie, c'est donc bien un produit scalaire.

$\phi(u, v) = 0$, donc u et v sont orthogonaux pour ϕ ; on peut donc choisir comme premiers vecteurs de base :

$u' = \frac{u}{\sqrt{\phi(u, u)}} = \frac{u}{\|u \wedge v\|}$, et $v' = \frac{v}{\sqrt{\phi(v, v)}} = \frac{v}{\|u \wedge v\|}$. On cherche un troisième vecteur w' colinéaire à w tel que :

$w = u \wedge v + \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ (procédé de Schmidt appliqué à $(u, v, u \wedge v)$), $\phi(w, u) = \phi(w, v) = 0$. Alors :

$((u \wedge v + \lambda \cdot u + \mu \cdot v) \wedge u)|(u \wedge u)) + ((u \wedge v + \lambda \cdot u + \mu \cdot v) \wedge v)|(u \wedge v)) = 0$, et :

$((u \wedge v + \lambda \cdot u + \mu \cdot v) \wedge u)|(v \wedge u)) + ((u \wedge v + \lambda \cdot u + \mu \cdot v) \wedge v)|(v \wedge v)) = 0$, c'est-à-dire :

$((u \wedge v + \lambda \cdot u) \wedge v)|(u \wedge v)) = \lambda \cdot (u \wedge v|u \wedge v) = 0$ (car $(u \wedge v) \wedge v$ est orthogonal à $u \wedge v$), et :

$((u \wedge v + \mu \cdot v) \wedge u)(v \wedge u) = \mu \cdot (v \wedge u | v \wedge u) = 0$ (pour une raison similaire). Donc : $\lambda = \mu = 0$.

$w = u \wedge v$, et $w' = \frac{w}{\sqrt{\phi(w, w)}} = \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\| \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}}$ (car $u \wedge v$ est \perp à u et v , donc : $\|(u \wedge v) \wedge u\| = \|u \wedge v\| \cdot \|u\|$, $\|(u \wedge v) \wedge v\| = \|u \wedge v\| \cdot \|v\|$).

La base cherchée est : $(\frac{u}{\|u \wedge v\|}, \frac{v}{\|u \wedge v\|}, \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\| \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}})$. (Il y a d'autres réponses possibles, par exemple avec Schmidt sur la base canonique).

• Soit $\phi(x, y) = ((x|u) \cdot x | (y|v) \cdot y)$; $\phi(u, v) = u^2 v^2 \cdot (u|v)$, $\phi(v, u) = (u|v)^3$. Comme u et v ne sont pas colinéaires, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte donc $\phi(v, u) < \phi(u, v)$; ce n'est pas un produit scalaire.

• Soit $\phi(x, y) = ((x|u) \cdot u | (y|v) \cdot v)$; $\phi(u, v) = u^2 v^2 \cdot (u|v)$, $\phi(v, u) = (u|v)^3$. Comme précédemment, ce n'est pas un produit scalaire.

• Soit $\phi(x, y) = (s(x)|s(y))$; si on connaissait le chapitre I, on saurait que s est une isométrie qui conserve le produit scalaire, donc : $(s(x)|s(y)) = (x|y)$. Mais là, il faut le redémontrer. Soit $e_1 = u/\|u\|$, e_2 unitaire appartenant à u^\perp , et $e_3 = e_1 \wedge e_2$; alors, si $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$ et $y = y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + y_3 \cdot e_3$, alors :
 $s(x) = -x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$ et $s(y) = -y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + y_3 \cdot e_3$, donc : $(s(x)|s(y)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = (x|y)$.

Il s'agit donc du produit scalaire canonique et toute base préalablement orthonormale convient.

• Soit $\phi(x, y) = (s'(x)|s'(y))$; il est très simple de vérifier les conditions pour que ça soit un produit scalaire car une symétrie est injective, donc $s'(x) = 0_E \Rightarrow x = 0_E$.

On pose ensuite $w = u \wedge v$, alors : $\phi(u, u) = u^2$, $\phi(v, v) = v^2$, $\phi(w, w) = w^2$, $\phi(u, w) = \phi(v, w) = 0$ (car w est orthogonal à u et v).

On peut donc prendre $e_1 = \frac{u}{\|u\|}$, $e_3 = \frac{w}{\|w\|} = \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}$, et $e_2' = v + \lambda \cdot u$: $\phi(u, v + \lambda \cdot u) = (-u|v - \lambda \cdot u) = -(u|v) + \lambda \cdot u^2 = 0$,

donc : $\lambda = \frac{(u|v)}{\|u\|^2}$; par suite : $\phi(e_2', e_2') = (v - \frac{(u|v)}{\|u\|^2} \cdot u | v - \frac{(u|v)}{\|u\|^2} \cdot u) = v^2 - \frac{(u|v)^2}{\|u\|^2}$. Finalement :

$\frac{1}{\phi(e_2', e_2')} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2 \|v\|^2 - (u|v)^2} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2(u, v))} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2(u, v)} = \frac{\|u\|^2}{\|u \wedge v\|^2}$, donc :

$e_2 = \frac{e_2'}{\phi(e_2', e_2')} = \frac{\|u\|}{\|u \wedge v\|} \cdot (\|u\| \cdot v + \frac{(u|v)}{\|u\|} \cdot u) = \frac{1}{\|u \wedge v\|} \cdot (\|u\|^2 \cdot v + (u|v) \cdot u)$.

La base cherchée est donc : $(\frac{u}{\|u\|}, \frac{(u|v) \cdot u + \|u\|^2 \cdot v}{\|u \wedge v\|}, \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|})$.