D3) TD : Espaces préhilbertiens (troisième partie).

D3.1) Montrer que si f est une fonction continue de l'ensemble des réels dans lui-même et nulle sur $\mathbb{R}^*$ alors $f(0) = 0$.

- *Corrigé* : On pose $f(0) = a$ et on écrit la formule de continuité en 0 :

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ |x| < \eta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

On la précise aux points où x n'est pas nul car : $\forall \eta > 0, \ \exists x \neq 0, \ |x| < \eta$. Donc :

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ |x| < \eta$ et $x \neq 0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Mais alors $f(x) = a$, donc : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ |x| < \eta$ et $x \neq 0 \Rightarrow |a| < \varepsilon$.

L'introduction de x n'est alors plus utile : $\forall \varepsilon > 0, \ |a| < \varepsilon$.

Cette condition signifie que a est nul. En effet, supposons que $a \neq 0$ et posons $\varepsilon = |a|/2$, alors : $|a| < |a|/2$, ce qui est impossible.

Conclusion : $f(0) = 0$.

D3.2) Montrer que si f est une fonction continue de l'ensemble des réels dans lui-même qui vérifie pour tout couple de réels (x, y) : $f(x + y) = f(x) + f(y)$ alors il existe un réel a fixé tel que pour tout x : $f(x) = ax$.

- *Corrigé* : Soit f définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout couple de réels (x, y) : $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Pour $x = 0$ et $y = 1$: $f(0 + 1) = f(0) + f(1)$, d'où : $f(0) = 0$.

n étant un entier naturel non nul, $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels quelconques, on montre par récurrence que :

$f(x_1 + x_2 + ...+ x_n) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$.

On pose dans ce cas $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$, alors : $f(n) = n.f(1)$. (*Vrai sur* $\mathbb{N}$).

On pose ensuite $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1/n$, alors : $f(1/n) = (1/n).f(1)$.

On pose ensuite $x_1 = x_2 = ... = x_p = 1/q$, alors : $f(p/q) = (p/q).f(1)$. (*Vrai sur* $\mathbb{Q}^+$).

On calcule ensuite $f(r + (-r))$ et alors $f(-r) = (-r).f(1)$. (*Vrai sur* $\mathbb{Q}$).

$\forall \varepsilon > 0$, on pose $\varepsilon = 1/n$, $\exists \eta > 0$, on pose $\eta' = \inf\{\eta, 1/n\}$; $\forall x, \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Alors :

$|x - x_0| < \eta'$ et $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Alors : $x_0 - 1/n < x < x_0 + 1/n$ et $x.f(1) - 1/n < f(x_0) < x.f(1) + 1/n$.

Soit : $s = \mathrm{SGN}(f(1))$; on en déduit : $(x_0 - s/n).f(1) - 1/n < f(x_0) < (x_0 + s/n).f(1) + 1/n$.

On fait tendre n vers l'infini et on applique le théorème des gendarmes : $f(x_0) = x_0.f(1)$. (*Vrai sur* $\mathbb{R}$).

D3.3) Étudier la continuité de l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(x, y) = \sup(x, y)$ (montrer d'abord que : $|\sup(x', y') - \sup(x, y)| \leq \sup(|x' - x|, |y' - y|)$). Même question avec : $g(x, y) = |x| + |y|$.

- *Corrigé* : • Montrons d'abord l'indication. On suppose que $x' = \sup(x', y')$; la démonstration sera identique dans l'autre cas. Il y a alors deux possibilités :

Si $x = \sup(x, y)$, alors : $|\sup(x', y') - \sup(x, y)| = |x' - x| \leq \sup(|x' - x|, |y' - y|)$.

Si $y = \sup(x, y)$, alors, comme $x' = y' + a'$ et $y = x + a$: $|\sup(x', y') - \sup(x, y)| = |x' - y| = |y' + a' - x - a|$, tandis que : $\sup(|x' - x|, |y' - y|) = \sup(|y' + a' - x|, |y' - x - a|)$.

Si $y' - x - a \geq 0$, on a alors : $|y' - x + a' - a| \leq |y' - x + a'|$.

Si $y' - x - a \leq 0$, on a alors : $|y' - x + a' - a| = |-(y' - x - a) - a'| \leq |y' - x - a| = |-(y' - x - a)|$.

Dans les 2 cas $|x' - y|$ est inférieur à l'un des deux termes $|x' - x|$ ou $|y' - y|$, donc à $\sup(|x' - x|, |y' - y|)$.

En conclusion, on a toujours : $|\sup(x', y') - \sup(x, y)| \leq \sup(|x' - x|, |y' - y|)$.

On peut ainsi écrire la formule de continuité en (x_0, y_0) de f :

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

En effet : $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, y - y_0)\| < \eta \Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \eta \Rightarrow |x - x_0| < \eta$ et $|y - y_0| < \eta$; et : $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |\sup(x, y) - \sup(x_0, y_0)| \leq \sup(|x - x_0|, |y - y_0|)$. En conséquence de quoi :

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow |x - x_0| < \eta$ et $|y - y_0| < \eta \Rightarrow \sup(|x - x_0|, |y - y_0|) < \eta \Rightarrow$

$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \sup(|x - x_0|, |y - y_0|) < \eta \leq \varepsilon$ pour le choix de $\eta \leq \varepsilon$.

Donc : $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \eta \leq \varepsilon$ convient, $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

f est donc continue en tout (x_0, y_0), elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Écrivons la formule de continuité en (x_0, y_0) de f :

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow |g(x, y) - g(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Comme on l'a vu ci-dessus : $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow |x - x_0| < \eta$ et $|y - y_0| < \eta$; et comme :

$|g(x, y) - g(x_0, y_0)| = \big||x| + |y| - |x_0| - |y_0|\big| = \big||x| - |x_0| + |y| - |y_0|\big| \leq \big||x| - |x_0|\big| + \big||y| - |y_0|\big| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < 2\eta$.

Alors : $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \eta \leq \varepsilon/2$ convient, $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow |x - x_0| < \eta$ et $|y - y_0| < \eta \Rightarrow$

$|g(x, y) - g(x_0, y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < 2\eta \leq \varepsilon$.

g est donc continue en tout (x_0, y_0), elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

D3.4) Soit : $f(x, y) = x - y$, $g(x, y) = \cos(x) - \cos(y)$ et $h(x, y) = g(x, y)/f(x, y)$ (si $x \neq y$), $h(x, x) = -\sin(x)$. Montrer que : $\forall\ t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|$; puis que : $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b|$.
(Utiliser $\cos(p) - \cos(q) = -2.\sin(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2})$). Montrer que f et g sont continues, en déduire la continuité de h quand $x \neq y$. Étudier la continuité de h en $(0, 0)$.

Les questions suivantes sont facultatives (mais elles permettent de ne pas traiter le cas $(0, 0)$). Montrer que : $\forall\ \varepsilon > 0$, si un réel a vérifie $1 - \varepsilon < a < 1 + \varepsilon$, alors : $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $t - \varepsilon.|t| \leq ta \leq t + \varepsilon.|t|$. Existe-t-il $\eta > 0$ tel que : pour $|h| < \eta$: $|\sin(h)/h - 1| < \varepsilon/2$, et pour $|k - x_0| < \eta$: $|\sin(k) - \sin(x_0)| < \varepsilon/2$. Étudier ensuite la continuité de h en (x_0, x_0). (Selon deux cas : si $x = y$ ou si $x \neq y$).

- *Corrigé* : On étudie la fonction $\phi(t) = t - \sin(t)$ pour $t \geq 0$; on en déduit $\sin(t) \leq t$, puis, pour $t < 0$ on utilise la parité.

$|\cos(x) - \cos(y)| = |-2|.|\sin((x - y)/2)|.|\sin((x + y)/2)|$; le second sinus est majoré par 1, et on obtient le résultat souhaité.

h continue en (x_0, x_0) : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0$ (qu'il faut trouver), $\forall\ x$, $\|(x, y) - (x_0, x_0)\| < \eta \Rightarrow |h(x_0, x_0) - h(x, y)| < \varepsilon$.

$\|(x, y) - (x_0, x_0)\| = \|(x - x_0, y - x_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - x_0)^2} < \eta \Rightarrow |x - x_0| < \eta$ et $|y - x_0| < \eta$. On en déduit, en additionnant $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$ et $-x_0 - \eta < -y < -x_0 + \eta$: $-\eta < \frac{x - y}{2} < \eta$. Et aussi : $x_0 - \eta < \frac{x + y}{2} < x_0 + \eta$. En outre, comme la fonction sinus est continue il existe η' tel que pour $x_0 - \eta' < \frac{x + y}{2} < x_0 +$

$\sin(x_0) - \varepsilon/2 < \sin(\frac{x + y}{2}) < \sin(x_0) + \varepsilon/2$. Et aussi : $-1 \leq \sin(\frac{x + y}{2}) \leq 1$.

Par ailleurs : $h(x_0, x_0) - h(x, y) = -\sin(x_0) + (\cos(y) - \cos(x))/(y - x) = \sin(\frac{x + y}{2}).\sin(\frac{x - y}{2})/\frac{x - y}{2} - \sin(x_0)$.

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \sin(h)/h = 1$ (avec $h = \frac{x - y}{2}$), $\exists\ \eta'' > 0$ tel que pour $-\eta'' < \frac{x - y}{2} < \eta''$: $1 - \varepsilon/2 < \sin(\frac{x - y}{2})/\frac{x - y}{2} < 1 + \varepsilon/2$.
Alors :
$\sin(\frac{x + y}{2}) - \sin(x_0) - \varepsilon.|\sin(\frac{x + y}{2})|/2 < h(x_0, x_0) - h(x, y) < \sin(\frac{x + y}{2}) - \sin(x_0) + \varepsilon.|\sin(\frac{x + y}{2})|/2$. (cf. question avec *ta*)

Finalement, pour η' et $\eta'' \leq \eta$: $-\varepsilon < h(x_0, x_0) - h(x, y) < \varepsilon$.

Il reste à traiter le cas $x = y$, mais c'est une conséquence directe de la continuité de la fonction sinus.

Donc h continue.

En $(0, 0)$ on peut d'abord tenter la limite selon la direction $(y = ax)$. Comme elle est nulle, elle ne dépend pas de a, ce qui donne une forte présomption sur la continuité tout en n'en étant pas une preuve irréfutable.

D3.5) Étudier la continuité de l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ (x ou y non nul) et $f(0, 0) = 1$. Même question avec : $g(x, y) = \ln(1 + x^2).\ln(1 + y^2)/(x^2 + y^2)$ (x ou y non nul) et $g(0, 0) = 0$. Même question avec la fonction : $h(x, y) = x.\ln(|x|) + y.\ln(|y|)$ (pour x et y non nuls), $h(0, y) = y.\ln(|y|)$ (pour y non nul), $h(x, 0) = x.\ln(|x|)$ (pour x non nul), $h(0, 0) = 0$.

- *Corrigé* : • Il est simple de montrer que la fonction $\psi(x,y) = x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; en effet, étant donné (x_0, y_0) : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$, $\eta \le \sqrt{\varepsilon}$ convient, $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - x_0)^2} < \eta \Rightarrow$
$(x - x_0)^2 + (y - x_0)^2 < \eta^2 \Rightarrow |\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0)| = |x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2| = |x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \le |x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2| < \eta^2 \le \varepsilon$.
De même, la fonction $\phi(X) = 1/X$ pour $X \ne 0$ et $\phi(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ seulement car elle n'est pas bornée au voisinage de 0.

En conséquence de quoi, $f = \phi\circ\psi$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ car l'unique antécédent de 0 par ψ est $(0, 0)$.

- *Autre méthode* : Soit la fonction $\phi(r, \theta) = (r.\cos(\theta), r.\sin(\theta))$; elle est bijective pour $r > 0$ et $\theta \in\,]-\pi/2, \pi/2[$.

Elle est par ailleurs continue et sa réciproque : $\phi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan}(y/x))$, est elle-même continue, avec : $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $f\circ\phi(r, \theta) = 1/r^2$ est continue sur $]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$, donc $f = (f\circ\phi)\circ\phi^{-1}$ est continue sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. Et comme f est paire selon x, elle est ainsi continue sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Par symétrie entre x et y, elle est finalement continue sur $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$.

Il reste à montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$: Soit $x = 1/n$ (où $n \in \mathbb{N}$) et $y = 0$, alors $f(x, y) = n^2$ n'est pas bornée, on ne peut majorer par aucun ε, ce qui infirme la continuité :

$\forall\, \varepsilon > 0$ et $\forall\, \eta > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $n = 1 + \sup(E(\sqrt{\varepsilon}), E(1/\eta))$, tel que $0 < \|(x, y)\| = 1/n < \eta$ et $f(x, y) = n^2 > \varepsilon$.

• $g(x, y) = \dfrac{\ln(1 + x^2).\ln(1 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (x ou y non nul) et $g(0, 0) = 0$. Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$, g est le produit de fonctions continues, à savoir, en posant $\phi(X) = \ln(1 + X^2)$: $g(x,y) = \phi(x)\phi(y)f(x, y)$. Il faut donc étudier la continuité en $(0, 0)$, où il y a une indétermination du type $0/0$.

Soit : $\ln(1 + x^2) = x^2\, o(x^2)$ et $\ln(1 + y^2) = y^2 + o(y^2)$, d'où : $g(x, y) = 1 + \dfrac{o(x^2) + o(y^2)}{x^2 + y^2}$. Mais comme $x^2 \le x^2 + y^2$, alors $\dfrac{o(x^2)}{x^2 + y^2} \le \dfrac{o(x^2)}{x^2} = o(1)$; On en déduit que : $g(x, y) = 1 + o(1)$ donc : $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} g(x, y) = 1 = g(0, 0)$.

g est ainsi continue en $(0, 0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

- On peut aussi calculer cette limite en écrivant que $0 \le x^2y^2 \le (x^2 + y^2)^2$, ce qui est une évidence en développant le membre de droite.

Ainsi : $g(x,y) = \dfrac{\ln(1 + x^2).\ln(1 + y^2)}{x^2 + y^2} = \dfrac{\ln(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)}{x^2 + y^2}$, d'où : $\dfrac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \le g(x, y) \le \dfrac{\ln(1 + x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2)}{x^2 + y^2}$.

En posant $X = x^2 + y^2$: $\dfrac{\ln(1 + X)}{X} \le g(x, y) \le \dfrac{\ln(1 + X + X^2)}{X}$. On conclut avec le théorème des gendarmes.

• $h(x, y) = x.\ln(|x|) + y.\ln(|y|)$ (pour x et y non nuls), $h(0, y) = y.\ln(|y|)$ (pour y non nul), $h(x, 0) = x.\ln(|x|)$ (pour x non nul), $h(0, 0) = 0$.

En posant $\phi(X) = X.\ln(|X|)$ pour $X \ne 0$ et $\phi(0) = 0$, alors : $h(x, y) = \phi(x) + \phi(y)$. La continuité de ϕ sur $\mathbb{R}$, qui est très simple à établir car $\lim\limits_{x\to0} x.\ln(|x|) = 0$, implique donc celle de h sur $\mathbb{R}^2$.