D4) TD : Espaces préhilbertiens (quatrième partie).

D4.1) *a*) Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$; en déduire les sommes : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^2$, $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$, $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^4$.

b) Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$; en déduire les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^2$. (Attention : f n'est pas paire).

- *Corrigé* : *a*) Rappel du cours : $a_0 = \frac{1}{T}.\int_I f(t)dt$; pour $n \geq 1$: $a_n = \frac{2}{T}.\int_I f(t)\cos(n\omega t)dt$; $b_n = \frac{2}{T}.\int_I f(t)\sin(n\omega t)dt$.

Ici : $a_0 = \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$; $a_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t^2.\cos(nt)dt$; $b_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t^2.\sin(nt)dt = 0$ car f est paire sur $[-\pi, \pi]$.

- *Première méthode* : On intègre a_n par parties deux fois consécutivement.

$a_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t^2.\cos(nt)dt = \frac{1}{n\pi}.[t^2.\sin(nt)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t.\sin(nt)dt = \frac{-2}{n\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t.\sin(nt)dt = \frac{2}{n^2\pi}.[t.\cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)dt =$

$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$.

- *Deuxième méthode* : On calcule $a_n + i.b_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t^2.e^{int}dt$, en intégrant deux fois par parties.

$a_n + i.b_n = \frac{1}{in\pi}.[t^2.e^{int}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{in\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t.e^{int}dt = \frac{2i}{n\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t.e^{int}dt = \frac{2}{n^2\pi}.[t.e^{int}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = \frac{2}{n^2\pi}.[t.e^{int}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$, d'où :

$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ et $b_n = 0$.

Dans les deux cas, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, et d'après le théorème de Dirichlet : $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.\cos(nx)$.

Pour $x = \pi$: $f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, d'où : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pour $x = 0$: $f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, d'où : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}.(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}) = \frac{1}{2}.(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}) = \frac{\pi^2}{8}$.

On peut aussi le calculer autrement :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, d'où : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

On applique ensuite la formule de Parseval : $\frac{1}{T}.\int_I |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}.\sum_1^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$. Ici :

$\frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{\pi^4}{9} + 8.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, d'où : $\frac{\pi^4}{9} + 8.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5}$, et ainsi : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$, d'où : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{15}{16}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

b) Ici, $a_0 = \frac{1}{2\pi}.\int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{4\pi^2}{3}$, et on ne va appliquer que la seconde méthode car on ne peut plus utiliser la parité pour se passer du calcul de b_n :

$a_n + i.b_n = \frac{1}{\pi}.\int_0^{2\pi} t^2.e^{int}dt = \frac{1}{in\pi}.[t^2.e^{int}]_0^{2\pi} - \frac{2}{in\pi}.\int_0^{2\pi} t.e^{int}dt = \frac{-4i\pi}{n} + \frac{2i}{n\pi}.\int_0^{2\pi} t.e^{int}dt = \frac{-4i\pi}{n} + \frac{2}{n^2\pi}.[t.e^{int}]_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}.\int_0^{2\pi} e^{int}dt =$

$\frac{-4i\pi}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{2i}{n^3\pi}.[e^{int}]_0^{2\pi} = \frac{-4i\pi}{n} + \frac{4}{n^2}$, d'où : $a_n = \frac{4}{n^2}$ et $b_n = \frac{-4\pi}{n}$; et, d'après le théorème de Dirichlet :

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$: $f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4.\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{\pi.\sin(nx)}{n})$.

Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$: $\frac{4\pi^2}{3} + 4.\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{\pi.\sin(nx)}{n}) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{f(0^+) + f(2\pi^-)}{2} = 2\pi^2$.

Ainsi, pour $x = 0$: $\frac{4\pi^2}{3} + 4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\pi^2$, donc : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et pour $x = \pi$: $\frac{4\pi^2}{3} + 4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \pi^2$, d'où : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

D4.2) Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$ où α n'est pas un entier ; en déduire les sommes : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 - \alpha^2)$ et $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/(n^2 - \alpha^2)$. Montrer ensuite l'égalité : $\cot an(x) = 1/x + 2x.\sum_{n=1}^{\infty} 1/(x^2 - n^2\pi^2)$; pour quelles valeurs de x cette égalité est-elle vraie ?

- *Corrigé* : $f(-\pi) = f(\pi)$ et f est paire, donc $b_n = 0$; et : $a_0 = \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha t)dt = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$.

$a_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}.\int_{0}^{\pi}(\cos((n - \alpha)t) + \cos((n + \alpha)t))dt$ (le $\frac{1}{2}$ de la formule de trigo part avec le double introduit en intégrant de 0 à π).

$a_n = \frac{1}{\pi}.[\frac{\sin((n - \alpha)t)}{n - \alpha} + \frac{\sin((n + \alpha)t)}{n + \alpha}]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}.(\frac{\sin(n\pi - \alpha\pi)}{n - \alpha} + \frac{\sin(n\pi + \alpha\pi)}{n + \alpha}) = \frac{1}{\pi}.(\frac{(-1)^{n+1}.\sin(\alpha\pi)}{n - \alpha} + \frac{(-1)^n.\sin(\alpha\pi)}{n + \alpha}) =$

$a_n = \frac{(-1)^n.\sin(\alpha\pi)}{\pi}.(\frac{1}{n + \alpha} - \frac{1}{n - \alpha}) = \frac{2(-1)^{n+1}\alpha.\sin(\alpha\pi)}{(n^2 - \alpha^2)\pi}$.

D'après le théorème de Dirichlet : $f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.(1 + 2\alpha^2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}.\cos(nx)}{(n^2 - \alpha^2)})$.

Pour $x = \pi$: $f(\pi) = \cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.(1 - 2\alpha^2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - \alpha^2})$, d'où : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha.\tan(\alpha\pi)}$.

Pour $x = 0$: $f(0) = 1 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.(1 + 2\alpha^2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n^2 - \alpha^2)})$, d'où : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n^2 - \alpha^2)} = \frac{\pi}{2\alpha.\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{2\alpha^2}$.

On pose $\alpha = \frac{x}{\pi}$ dans la formule $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha.\tan(\alpha\pi)}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{\pi^2}{2x^2} - \frac{\pi^2.\cot an(x)}{2x}$, d'où :

$\cot an(x) = \frac{2x}{\pi^2}.(\frac{\pi^2}{2x^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2}) = \frac{1}{x} + 2x.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}$. Cette égalité est vraie pour $x \notin \pi.\mathbb{Z}$.

D4.3) Soit $f(x)$ la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\sin^3(nx)/n!$ (x réel) ; déterminer son domaine de définition et montrer qu'elle admet un développement en série de Fourier qu'on calculera. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

- *Corrigé* : $\sum_{n=0}^{\infty}|\sin^3(nx)|/n! \leq \sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = 1/e$; cette série est donc toujours absolument convergente ; f est définie sur $\mathbb{R}$.

On linéarise : $\sin^3(nx) = \frac{3}{4}.\sin(nx) - \frac{1}{4}.\sin(3nx)$, d'où ($a_n = 0$ car f impaire) :

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin(nx)$ avec : $b_{3n} = \frac{3}{4(3n)!} - \frac{1}{(4n)!}$, $b_{3n+1} = \frac{3}{4(3n + 1)!}$, $b_{3n+2} = \frac{3}{4(3n+2)!}$.

Par exemple : $\phi(n) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}.|\sin(\frac{n\pi}{3})|$, ou : $\phi(n) = E(1 + E(\frac{n}{3}) - \frac{n}{3})$, et : $b_n = \frac{3}{4n!} - \frac{\phi(n)}{(4.E(n/3))!}$.

On passe ensuite dans l'ensemble des complexes pour faire apparaître des séries exponentielles :

$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4}.\frac{e^{inx}}{n!} - \frac{1}{4}.\frac{e^{3inx}}{n!}) = \frac{3}{4}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!} - \frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{3ix})^n}{n!} = \frac{3}{4}.e^{\cos(x) + i.\sin(x)} - \frac{1}{4}.e^{\cos(3x) + i.\sin(3x)} =$

$\frac{3}{4}.e^{\cos(x)}.(\cos(\sin(x)) + i.\sin(\sin(x)) - \frac{1}{4}.e^{\cos(3x)}.(\cos(\sin(3x)) + i.\sin(\sin(3x)))$.

On prend la partie imaginaire : $f(x) = \frac{3}{4}.\sin(\sin(x))e^{\cos(x)} - \frac{1}{4}.\sin(\sin(3x))e^{\cos(3x)}$.

D4.4) *Polynômes de Legendre*. Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^{1}P(x)Q(x)dx$, Montrer que la famille $(L_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale, avec : $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}.\frac{d^n}{dX^n}((X^2 - 1)^n)$ (Plus généralement, on peut montrer en intégrant par parties que $(L_n|Q) = 0$ pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n) ; et que la famille $((\sqrt{n + ½}).L_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de la base B. Montrer que, si $n \geq 2$: $(n + 1).L_{n+1}(X) - (2n + 1)X.L_n(X) + n.L_{n-1}(X) = 0$ (établir que $(2n + 1)XL_n - (n + 1)L_{n+1}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n). Montrer finalement que L_n vérifie l'équation différentielle : $(X^2 - 1).L''_n(X) + 2X.L'_n(X) - n(n + 1).L_n(X) = 0$ (appliquer la formule de Leibniz à : $((X^2 - 1)((X^2 - 1)^n)')^{(n+1)}$, et à : $(n(X^2 - 1)'(X^2 - 1)^n)^{(n+1)}$).

- *Corrigé* : • Soit $U = (X^2 - 1)^n$, alors $L_n = \frac{1}{2^n n!}.U^{(n)}$, et P un polynôme quelconque de degré strictement inférieur à n. Il faut noter que -1 et 1 étant racines d'ordre n de U, ils sont aussi racines des dérivées jusqu'à $U^{(n-1)}$, et que chaque dérivée faisant diminuer le degré de 1 : $d°(L_n) = n$. On peut ainsi procéder à l'intégration par parties :

$$2^n n!\int_{-1}^{1} P(x)L_n(x)dx = \int_{-1}^{1} P(x)U^{(n)}(x)dx = [P(x)U^{(n-1)}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P'(x)U^{(n-1)}(x)dx = -\int_{-1}^{1} P'(x)U^{(n-1)}(x)dx.$$

En poursuivant le processus : $2^n n!\int_{-1}^{1} P(x)L_n(x)dx = \int_{-1}^{1} P''(x)U^{(n-2)}(x)dx = ... = (-1)^k\int_{-1}^{1} P^{(k)}(x)U^{(n-k)}(x)dx$.

Pour $k = d°(P) + 1 \leq n$ (pour que $U^{(n-k)}$ admette bien les racines -1 et 1) : $P^{(k)}(x) = 0$, donc : $\int_{-1}^{1} P(x)L_n(x)dx = 0$.

En conséquence de quoi, si $m \neq n$, alors $(L_m|L_n) = 0$; c'est bien une famille orthogonale (en supposant $m < n$ alors $P = L_m$ dans ce qui précède, sinon on l'applique dans l'autre sens).

• Il faut ensuite calculer $(L_n|L_n)$. On a vu que, pour tout k convenable : $(P|U^{(n)}) = (-1)^k(P^{(k)}|U^{(n-k)})$; on applique cette propriété à $(U^{(n)}|U^{(n)}) = (-1)^n(U^{(2n)}|U)$; et comme $U^{(2n)} = (2n)!$ alors $(U^{(n)}|U^{(n)}) = (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n dx$. Soit, en posant $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x - 1$, et en procédant de même :

$$(L_n|L_n) = \frac{1}{(2^n n!)^2}.(U^{(n)}|U^{(n)}) = \frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2}.\int_{-1}^{1} u^n v^n.dx, \text{ avec :}$$

$$\int_{-1}^{1} u^n v^n.dx = \frac{1}{n+1}.[u^{n+1}v^n]_{-1}^{1} - \frac{n}{n+1}.\int_{-1}^{1} u^{n+1}v^{n-1}.dx = \frac{-n}{n+1}.\int_{-1}^{1} u^{n+1}v^{n-1}.dx = ... = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}.\int_{-1}^{1} u^{n+2}v^{n-2}.dx = ...$$

$$\frac{(-1)^k n(n-1)...(n-k+1)}{(n+1)(n+2)...(n+k)}.\int_{-1}^{1} u^{n+k}v^{n-k}.dx = ... = \frac{(-1)^n n(n-1)...1}{(n+1)(n+2)...(2n)}.\int_{-1}^{1} u^{2n}.dx = \frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}.\frac{1}{2n+1}.[u^{2n+1}]_{-1}^{1} = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Par suite : $(L_n|L_n) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+½}$.

D'où : $\sqrt{n + ½}).L_n$ est unitaire et la famille $((\sqrt{n + ½}).L_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.

• Soit $n \geq 2$; on souhaite connaître les deux termes de plus haut degré de L_n. On les obtient en dérivant n fois les deux termes de plus haut degré de U : $\frac{1}{2^n n!}.\frac{d^n}{dX^n}(X^{2n} - n.X^{2n-2}) = \frac{1}{2^n n!}.(\frac{(2n)!}{n!}.X^n - \frac{n(2n-2)!}{(n-2)!}.X^{n-2}) =$

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.X^n - \frac{n(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!}.X^{n-2} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.X^n - \frac{(n-1)(2n-2)!}{2^n((n-1)!)^2}.X^{n-2}.$$

Ainsi : $(2n + 1)XL_n - (n + 1)L_{n+1}$ admet les termes de plus haut degré suivants :

$$(2n + 1)X.(\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.X^n - \frac{(n-1)(2n-2)!}{2^n((n-1)!)^2}.X^{n-2}) - (n + 1)(\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}.X^{n+1} - \frac{n(2n)!}{2^{n+1}(n!)^2}.X^{n-1}) =$$

$$((2n + 1).\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} - (n +1).\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}).X^{n+1} + ((n + 1).\frac{n(2n)!}{2^{n+1}(n!)^2} - (2n + 1).\frac{(n-1)(2n-2)!}{2^n((n-1)!)^2}).X^{n-1} =$$

$$(\frac{(2n+1)!}{2^n(n!)^2} - \frac{2(n+1)^2(2n+1)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}).X^{n+1} + \frac{(2n-2)!}{2^{n+1}(n!)^2}.((n+1)n(2n)(2n-1) - (2n+1)(n-1)2n^2).X^{n-1} = \frac{n(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2}.X^{n-1}.$$

Comme $(2n + 1)XL_n - (n + 1)L_{n+1}$ admet $\frac{n(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2}.X^{n-1}$ comme terme de plus haut degré, c'est un polynôme de degré $n - 1$.

Par ailleurs, si P est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à $n - 2$, alors :

$(Q|(2n + 1)XL_n - (n + 1)L_{n+1}) = (2n + 1).(Q|XL_n) - (n + 1).(Q|L_{n+1}) = (2n + 1).(XQ|L_n) = 0$; donc, comme les L_k sont de degrés k, alors $Q \in \mathrm{Vect}(L_0, L_1, ..., L_{n-2})$, d'où : $(2n + 1)XL_n - (n + 1)L_{n+1} \in (L_0, L_1, ..., L_{n-2})^{\perp}$.

Finalement $(2n + 1).(Q|XL_n) - (n + 1).(Q|L_{n+1})$ est combinaison linéaire de L_n et L_{n-1} ; mais, comme L_n est de degré strictement supérieur, alors $(2n + 1).(Q|XL_n) - (n + 1).(Q|L_{n+1})$ est colinéaire à L_{n-1} :

$(2n + 1).(Q|XL_n) - (n + 1).(Q|L_{n+1}) = a.L_{n-1}$; on égalise les coefficients dominants :

$\frac{n(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2} = a.\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2}$, d'où : $a = n$, et ainsi : $(2n + 1).(Q|XL_n) - (n + 1).(Q|L_{n+1}) = nL_{n-1}$, ce qui prouve l'égalité souhaitée : $(n + 1).L_{n+1}(X) - (2n + 1)X.L_n(X) + n.L_{n-1}(X) = 0$.

• On applique la formule de Leibniz à : $((X^2 - 1)((X^2 - 1)^n)')^{(n+1)}$, et à : $(n(X^2 - 1)'(X^2 - 1)^n)^{(n+1)}$, en constatant qu'il s'agit de la même expression car $(X^2 - 1)((X^2 - 1)^n)' = n(X^2 - 1)'(X^2 - 1)^n$:

(Formule de Leibniz : $(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)}g^{(m-k)}$). Seuls restent $(X^2 - 1)$, $(X^2 - 1)' = 2X$, et $(X^2 - 1)'' = 2$.

$((X^2 - 1)U')^{(n+1)} = \binom{n+1}{0}.(X^2 - 1)U^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}.2XU^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}.2U^{(n)} =$

$(X^2 - 1)U^{(n+2)} + 2(n + 1)XU^{(n+1)} + n(n + 1)U^{(n)} =$

$(2nXU)^{(n+1)} = 2n.\binom{n+1}{0}.XU^{(n+1)} + 2n.\binom{n+1}{1}.U^{(n)} = 2nXU^{(n+1)} + 2n(n + 1).U^{(n)}$, d'où :

$(X^2 - 1)U^{(n+2)} + 2XU^{(n+1)} - n(n + 1)U^{(n)} = (X^2 - 1)(U^{(n)})'' + 2X(U^{(n)})' - n(n + 1)U^{(n)} = 0$.

En divisant par $2^n n!$: $(X^2 - 1).L''_n(X) + 2X.L'_n(X) - n(n + 1).L_n(X) = 0$.

D4.5) Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni de la base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$; trouver trois droites D_1, D_2, D_3 telles que $\mathrm{Vect}(e_1)$ soit bissectrice de (D_2, D_3), $\mathrm{Vect}(e_2)$ soit bissectrice de (D_1, D_3), et $\mathrm{Vect}(e_3)$ soit bissectrice de (D_1, D_2).

- *Corrigé* : Soit u_1, u_2, u_3 des vecteurs directeurs respectifs des droites D_1, D_2, D_3, et de même norme. Il est alors possible de choisir u_1, u_2, u_3 tels que : $e_1 = \frac{1}{2}.(u_2 + u_3)$, $e_2 = \frac{1}{2}.(u_1 + u_3)$, $e_3 = \frac{1}{2}.(u_1 + u_2)$ (il y a d'autres solutions car un couple de droite admet deux bissectrices) ; cette possibilité repose sur le fait que, dans un triangle isocèle, la bissectrice est aussi la médiane.

On inverse le système obtenu et alors : $u_1 = -e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 - e_2 + e_3$, $u_3 = e_1 + e_2 - e_3$.