TSI2 / DM1-2008-2009.

Attention : Plus la réponse à une question paraît évidente, mieux elle doit être justifiée et rédigée.

I) On note $E(x)$ la partie entière de x : le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On note $m(x)$ la mantisse de x : $m(x) = x - E(x)$, et $\|x\| = \inf\{m(x), 1 - m(x)\}$ Dans toute la suite x désigne un réel quelconque.

1) À quel intervalle appartient $m(x)$?

2) *a*) Trouver les éléments x_0 de $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ au voisinage desquels : $E(x) = x + o(x)$. ($f = o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$). *b*) Idem pour : $E(x) = x + O(1)$ ($f = O(g) \Leftrightarrow |f(x)| \leq M.|g(x)|$ au voisinage de x_0 (M = *constante*)).

3) Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $E(x + k) = E(x) + k$.

4) Montrer que : $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

5) Comparer $1 - m(x)$ et $m(-x)$.

6) Soit $t \in [0, 1[$; montrer que : $E(x + t) - E(x) \in \{0, 1\}$ et $E(x) - E(x - t) \in \{0, 1\}$.

7) Soit $t \in [0, 1/2[$; montrer que :
$E(x + t) - E(x) = 1 \Leftrightarrow m(x) \geq 1 - t$, et : $E(x) - E(x - t) = 1 \Leftrightarrow m(x) < t$.

8) Soit $t \in [0, 1/2[$; montrer que : $E(x + t) - E(x - t) = 1 \Leftrightarrow \|x\| \leq t$. Que vaut $E(x + t) - E(x - t)$ si $\|x\| > t$?

9) Soit n l'entier relatif le plus proche de x ; exprimer n à l'aide de x, $m(x)$, $\|x\|$ et la partie entière (le plus simplement possible).

10) Montrer que la fonction $(x \mapsto \|x\|)$ est paire, bornée et 1-périodique, et que pour tout réel y :
$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq |x - y|$, et : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

10 bis) *Question réservée aux 5/2* : Donner le développement en série de Fourier de $\|x\|$, et étudier sa convergence. En déduire la valeur de : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

11) Montrer que : $2\|x\| \leq |\sin(\pi x)| \leq \pi\|x\|$.

12) En déduire que, pour $y \in \mathbb{R}$: $|e^{2i\pi x} - e^{2i\pi y}| \leq 2\pi\|x - y\|$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \notin \mathbb{Z}$:
$\left|\sum\limits_{k=0}^{n} e^{2i\pi(kx + y)}\right| \leq \frac{1}{2\|x\|}$.

II) Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in]a, +\infty[$, $f:[a, b] \to \mathbb{C}$, et $g \in C^1([a, b])$. On note $1_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq t \\ 0 & \text{si } n > t \end{cases}$ ($t \in [a, b]$).

1) Montrer que : $\sum\limits_{n=a}^{E(b)} 1_n(t).f(n) = \sum\limits_{n=a}^{E(t)} f(n)$.

2) Pour $n \in [a, b]$, montrer que : $\int_a^b 1_n(t).g'(t)dt = g(b) - g(n)$.

3) En déduire que : $\sum\limits_{n=a}^{E(b)} f(n)g(n) = \left(\sum\limits_{n=a}^{E(b)} f(n)\right).g(b) - \int_a^b \left(\sum\limits_{n=a}^{E(t)} f(n)\right).g'(t)dt$.

4) Application : Écrire la formule précédente pour $a = 1$, $b = n \in \mathbb{N}^*$, $f(t) = 1$, $g(t) = \ln(t)$.

5) En déduire que, pour $n \geq 2$: $0 \leq \ln(n!) - n.\ln(n) + n - 1 < \ln(n)$, et pour n grand : $\ln(n!) \sim n.\ln(n/e)$.