TSI2 / DM1-2008-2009.

I) On note $E(x)$ la partie entière de x : le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On note $m(x)$ la mantisse de x : $m(x) = x - E(x)$, et $||x|| = \inf\{m(x), 1 - m(x)\}$ Dans toute la suite x désigne un réel quelconque.

1) À quel intervalle appartient $m(x)$?

Par définition : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ (sinon $E(x) + 1$ serait un entier inférieur ou égal à x plus grand que $E(x)$ dont il est dit qu'il est lui-même le plus grand). Donc : $0 \leq x - E(x) < 1$, d'où : $m(x) \in [0, 1[$.

2) *a*) Trouver les éléments x_0 de $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ au voisinage desquels : $E(x)= x + o(x)$. ($f = o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$).

Par définition : $E(x) - x = o(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{E(x) - x}{x} = 0$. Il y a plusieurs cas à discuter :

Si $x_0 \in \mathbb{Z}^*$: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\geq x_0}} \frac{E(x) - x}{x} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{E(x) - x}{x} = \frac{-1}{x_0}$, les deux limites à droite et à gauche étant distinctes, l'égalité souhaitée est fausse. Si $x_0 = 0$, la limite à gauche est infinie.

Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\geq x_0}} \frac{E(x) - x}{x} = \frac{E(x_0) - x_0}{x_0} = \frac{-m(x_0)}{x_0}$, cette limite n'est pas nulle, l'égalité souhaitée est encore fausse.

Il y a cependant deux cas où elle est vraie : $x_0 = \pm\infty$. En effet : $\left|\frac{E(x) - x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$, on peut ensuite appliquer le théorème des gendarmes. (*Attention à la notion de voisinage*).

b) Idem pour : $E(x) = x + O(1)$ ($f = O(g) \Leftrightarrow |f(x)| \leq M.|g(x)|$ au voisinage de x_0 (M = *constante*)).

$E(x) = x + O(1) \Leftrightarrow m(x) = O(1) \Leftrightarrow |m(x)| \leq M$ au voisinage de x_0 ; par suite, $M = 1$ convient et la propriété est vraie.

3) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $E(x + k) = E(x) + k$.

Comme $E(x) \leq x < E(x) + 1$,en ajoutant k : $E(x) + k \leq x + k < E(x) + k + 1$; $E(x) + k$ est donc le plus grand entier inférieur ou égal à $x + k$, donc : $E(x) + k = E(x + k)$.

4) Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}$, $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

Première démonstration possible pour l'une des inégalités : $E(x) \leq x$ et $E(y) \leq y$, donc, en les additionnant : $E(x) + E(y) \leq x + y$; $E(x) + E(y)$ est un entier inférieur ou égal à $x + y$, tandis que $E(x + y)$ est le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à $x + y$. En conséquence de quoi : $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.

Les deux démonstrations à la fois : $E(x + y) = E(E(x) + E(y) + m(x) + m(y)) = E(x) + E(y) + E(m(x) + m(y))$ (d'après la question précédente). Et comme : $0 \leq m(x) < 1$ et $0 \leq m(y) < 1$, alors : $0 \leq m(x) + m(y) < 2$, donc :

$0 \leq E(m(x) + m(y)) < 2$ (donc ≤ 1 car c'est un entier). Finalement : $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$ (en additionnant $E(x) + E(y)$ à chaque membre).

Autre méthode : $E(x) \leq x < E(x) + 1 \Leftrightarrow E(x) + y \leq x + y < E(x) + y + 1 \Rightarrow$

$E(E(x) + y) \leq E(x + y) \leq E(E(x) + y + 1) \Leftrightarrow E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$ d'après la question précédente.

5) Comparer $1 - m(x)$ et $m(-x)$.

Si $x \in \mathbb{Z}$, alors : $m(-x) = m(x) = 0$, donc $1 - m(x) \neq m(-x)$.

Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors : $E(x) < x < E(x) + 1 \Rightarrow -E(x) - 1 < -x < -E(x)$, donc $E(-x) = -E(x) - 1$. Par suite :

$-x = -(E(x) + m(x)) = E(-x) + m(-x) = -E(x) - 1 + m(-x)$, d'où : $m(-x) = 1 - m(x)$.

Remarque : En appliquant le résultat de la question précédente avec $y = -x$, on peut tout au plus arriver à :

$m(-x) \leq 1 - m(x) \leq m(-x) + 1$.

6) Soit $t \in [0, 1[$; montrer que : $E(x + t) - E(x) \in \{0, 1\}$ et $E(x) - E(x - t) \in \{0, 1\}$.

D'après la quatrième question : $E(x) = E(x) + E(t) \leq E(x + t) \leq E(x) + E(t) + 1 = E(x) + 1$, d'où :

$0 \leq E(x + t) - E(t) \leq 1$, et comme c'est un entier, alors : $E(x + t) - E(x) \in \{0, 1\}$.

De même : $E(x - t) = E(x - t) + E(t) \leq E(x) \leq E(x - t) + E(t) + 1 = E(x - t) + 1$, d'où :

$0 \leq E(x) - E(x - t) \leq 1$, avec la même conclusion : $E(x) - E(x - t) \in \{0, 1\}$.

7) Soit $t \in [0, 1/2[$; montrer que : $E(x + t) - E(x) = 1 \Leftrightarrow m(x) \geq 1 - t$, et : $E(x) - E(x - t) = 1 \Leftrightarrow m(x) < t$.

$E(x + t) = E(E(x) + m(x) + t) = E(x) + E(m(x) + t) = E(x) + 1$ (par hypothèse) $\Leftrightarrow E(m(x) + t) = 1 \Leftrightarrow$

$1 \leq m(x) + t < 2$, et comme la condition avec 2 est triviale car $t < 1/2$ et $m(x) < 1$,alors :

$E(x + t) - E(x) = 1 \Leftrightarrow m(x) \geq 1 - t$.

De même : $E(x - t) = E(E(x) + m(x) - t) = E(x) + E(m(x) - t) = E(x) - 1$ (par hypothèse) $\Leftrightarrow E(m(x) - t) = -1 \Leftrightarrow$

$-1 \leq m(x) - t < 0$, et comme la condition avec -1 est triviale, alors : $E(x) - E(x - t) = 1 \Leftrightarrow m(x) < t$.

8) Soit $t \in [0, 1/2[$; montrer que : $E(x + t) - E(x - t) = 1 \Leftrightarrow ||x|| \leq t$. Que vaut $E(x + t) - E(x - t)$ si $||x|| > t$?

$E(x + t) - E(x - t) = (E(x + t) - E(x)) + (E(x) - E(x - t))$; on additionne deux entiers de $\{0, 1\}$, pour que leur somme vaille 1, il faut que l'un soit nul et que l'autre vaille 1. Donc : Soit $m(x) \geq 1 - t$ (auquel cas $m(x) \geq 1/2 > t$), soit $m(x) < t$ (auquel cas $m(x) < 1/2 < 1 - t$).

Écrit autrement : $1 - m(x) \leq t < m(x)$ ou $m(x) < t < 1 - m(x)$.

Dans le premier cas : $||x|| = 1 - m(x) \leq t$, dans le second cas : $||x|| = m(x) < t$. Dans les deux cas : $||x|| \leq t$.

Si $||x|| > t$, alors $E(x + t) - E(x - t)$ peut valoir 0 ou 2.

Si $E(x + t) - E(x) = E(x) - E(x - t) = 0$, alors : $m(x) < 1 - t$ et $m(x) \geq t$, donc : $m(x) \in [t, 1 - t[$.

Si $E(x + t) - E(x) = E(x) - E(x - t) = 1$, alors : $m(x) \geq 1 - t$ et $m(x) < t$, ce qui n'est pas possible.

Donc : $||x|| > t \Leftrightarrow m(x) \in [t, 1 - t[\Leftrightarrow E(x + t) - E(x - t) = 0$.

9) Soit n l'entier relatif le plus proche de x ; exprimer n à l'aide de x, $m(x)$, $||x||$ et la partie entière (le plus simplement possible).

Si $m(x) < 1/2$, l'entier le plus proche de x est $E(x)$; et si $m(x) \geq 1/2$, c'est $E(x) + 1$. Dans le premier cas on a $||x|| = m(x)$, et dans le second cas $||x|| = 1 - m(x)$. À noter que dans le premier cas $2.m(x) < 1$ si $x < 1/2$. Donc, si $x \neq 1/2$ alors $m(x) + ||x|| < 1$ dans le premier cas et $m(x) + ||x|| = 1$ dans le second cas. En additionnant $E(x)$: $E(x) + m(x) + ||x|| = x + ||x|| < E(x) + 1$ dans le premier cas et $x + ||x|| = E(x) + 1$ dans le second cas.

Finalement : $n = E(x + ||x||)$, ce qui reste vrai si $m(x) = 1/2$ car on trouve l'entier suivant qui est à même distance de x que $x - 1/2$. (À noter que ce résultat respecte la loi des arrondis car on arrondit 0,5 à 1).

10) Montrer que la fonction $(x \mapsto ||x||)$ est paire, bornée et 1-périodique, et que pour tout réel y :
$|\,||x|| - ||y||\,| \leq |x - y|$, et : $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Si $x \in \mathbb{Z}$, alors : $m(x) = 0$ donc $||x|| = ||-x|| = 0$.

Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors : $m(-x) = 1 - m(x)$ donc $\inf\{m(x), 1 - m(x)\} = \inf\{m(-x), 1 - m(-x)\}$, à savoir $||-x|| = ||x||$.

Il s'en suit que cette fonction est paire.

$0 \leq m(x) < 1$ donc $0 < 1 - m(x) \leq 1$; par suite : $0 \leq ||x|| \leq 1$, cette fonction est bornée. On peut même affiner pour répondre à une question ultérieure car l'un des deux au moins entre $m(x)$ et $1 - m(x)$ est inférieur à $1/2$, donc : $||x|| \in [0, 1/2]$.

$x = E(x) + m(x) \Rightarrow x + 1 = E(x) + m(x) + 1$; mais $x + 1 = E(x + 1) + m(x + 1) = E(x) + 1 + m(x + 1)$. Il s'en suit que : $m(x + 1) = m(x)$, donc $1 - m(x) = 1 - m(x + 1)$, et alors : $||x + 1|| = ||x||$. Cette fonction est 1-périodique.

Soit $y \in \mathbb{R}$; comme $0 \leq ||x|| \leq 1/2$ et $-1/2 \leq -||y|| \leq 0$, alors : $-1/2 \leq ||x|| - ||y|| \leq 1/2$,d'où : $|\,||x|| - ||y||\,| \leq 1/2$. Par suite, si $|x - y| \geq 1/2$, l'inégalité est vérifiée ; on se place donc dans le cas où : $x - 1/2 < y < x + 1/2$. Il n'y a donc que trois possibilités : $E(y) = E(x) - 1$ ou $E(x)$ ou $E(x) + 1$. Mais comme $y - 1/2 < x < y + 1/2$, le premier et le troisième cas sont parfaitement symétriques en échangeant les rôles des variables.

Si $E(y) = E(x)$, alors : $|x - y| = |m(x) - m(y)| = |(1 - m(x)) - (1 - m(y))|$; donc s'ils ont en plus le même entier le plus proche, il y a égalité : $|x - y| = |\,||x|| - ||y||\,|$. Par contre, s'il l'un est plus proche de l'entier inférieur $E(x)$ et l'autre plus proche de l'entier supérieur $E(x) + 1$: par symétrie du rôle des variables, on peut supposer qu'on a : $||x|| = m(x)$ et $||y|| = 1 - m(y)$, ce qui implique que $x < y$ et $m(x) \leq 1/2 \leq m(y)$. Alors :

$|\,||x|| - ||y||\,| = m(x) + m(y) - 1$, d'où : $|x - y| - |\,||x|| - ||y||\,| = (m(y) - m(x)) - (m(x) + m(y) - 1) = 1 - 2.m(x) \geq 0$, ce qui prouve la propriété.

Si $E(y) = E(x) + 1$, alors : $E(y) - 1/2 \leq x < E(y) \leq y < E(y) + 1/2$. Il s'en suit que : $||x|| = 1 - m(x)$ et $||y|| = m(y)$, avec $m(y) \leq 1/2 \leq m(x)$. Alors :

$|\,||x|| - ||y||\,| = m(x) + m(y) - 1$, d'où : $|x - y| - |\,||x|| - ||y||\,| = (m(x) - m(y)) - (m(x) + m(y) - 1) = 1 - 2.m(y) \geq 0$, ce qui prouve la propriété.

Il reste à étudier la dernière inégalité ; le problème se décompose en trois cas possibles :

$m(x) \leq m(y) \leq 1/2$ (qui par symétrie répond aussi à : $m(y) \leq m(x) \leq 1/2$), $m(x) \leq 1/2 \leq m(y)$ (qui par symétrie répond aussi à : $m(y) \leq 1/2 \leq m(x)$), $1/2 \leq m(x) \leq m(y)$ (qui par symétrie répond aussi à : $1/2 \leq m(y) \leq m(x)$).

Dans le premier cas : $||x + y|| = ||m(x) + m(y)|| = \inf\{m(x) + m(y), 1 - m(x) - m(y)\}$, $||x|| + ||y|| = m(x) + m(y)$; il est donc clair que $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (car $\inf\{a, b\} \leq a$).

Dans le second cas : $||x|| + ||y|| = m(x) + 1 - m(y)$, tandis que : $||x + y|| = ||m(x) + m(y)||$, mais $m(m(x) + m(y))$ vaut soit $m(x) + m(y) \geq 1/2$, soit $m(x) + m(y) - 1 \leq 1/2$, donc $||x + y|| = 1 - m(x) - m(y)$ ou $m(x) + m(y) - 1$. Il s'en suit que : $||x|| + ||y|| - ||x + y|| = 2.m(x)$ ou $2.(1 - m(y))$, positif dans les deux cas, ce qui prouve la propriété.

Dans le troisième cas : $||x + y|| = ||m(x) + m(y)|| = \inf\{m(x) + m(y) - 1, 2 - m(x) - m(y)\}$, tandis que par ailleurs : $||x|| + ||y|| = 1 - m(x) + 1 - m(y)$; il est donc clair que $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (car $\inf\{a, b\} \leq b$).

10 bis) *Question réservée aux 5/2* : Donner le développement en série de Fourier de $||x||$, et étudier sa convergence. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

La période étant 1, on se place dans $]-1/2, 1/2]$. La fonction étant paire, alors $b_n = 0$. En outre, on peut calculer les coefficients a_n en se limitant à $[0, 1/2]$, où $||x|| = x$. Ainsi :

$a_0 = 2.\int_0^{1/2} t.dt = 1/4$, pour $n \geq 1$: $a_n = 4.\int_0^{1/2} t.\cos(2\pi nt)dt = \ldots = ((-1)^n - 1)/n^2\pi^2$. Donc $a_{2n} = 0$, et d'après le théorème de Dirichlet, compte tenu du fait que $||-1/2|| = ||1/2|| = 1/2$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$, elle converge donc toujours vers sa série de Fourier :

$$||x|| = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi(2n + 1)x)}{(2n + 1)^2}.$$

Pour $x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, et alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, d'où finalement : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

11) Montrer que : $2||x|| \leq |\sin(\pi x)| \leq \pi||x||$.

Première remarque : $|\sin(\pi x)| = |\sin(\pi(E(x) + m(x)))| = |\sin(\pi.m(x))| = |\sin(\pi - \pi.m(x))| = |\sin(\pi(1 - m(x)))|$, d'où :

$|\sin(\pi x)| = |\sin(\pi||x||)|$. Donc, du fait que pour tout X positif : $\sin(X) \leq X$, alors : $|\sin(\pi x)| = |\sin(\pi||x||)| \leq \pi||x||$.

Il ne reste plus qu'à montrer l'autre inégalité ; en posant $t = ||x||$, il faut montrer que $f(t) = \sin(\pi t) - 2t \geq 0$ quand t varie dans $[0, 1/2]$. Soit : $f'(t) = \pi.\cos(\pi t) - 2$ et $f''(t) = -\pi^2.\sin(\pi t) \leq 0$. Par suite, f' est décroissante, d'abord positive (car $f'(0) = \pi - 2$), puis négative (car $f'(1/2) = -2$) ; f est donc croissante puis décroissante admettant ses minima aux extrémités : $f(0) = f(1/2) = 0$. Conclusion : $f(t) \geq 0$, ce qui prouve la propriété.

12) En déduire que, pour $y \in \mathbb{R}$: $|e^{2i\pi x} - e^{2i\pi y}| \leq 2\pi||x - y||$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \notin \mathbb{Z}$: $|\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi(kx + y)}| \leq \frac{1}{2||x||}$.

$|e^{2i\pi x} - e^{2i\pi y}| = \sqrt{(\cos(2\pi x) - \cos(2\pi y))^2 + (\sin(2\pi x) - \sin(2\pi y))^2} = \sqrt{2(1 - \cos(2\pi(x - y)))} = 2|\sin(\pi(x - y))| \leq 2\pi||x - y||$.

Comme $x \notin \mathbb{Z}$: $|\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi(kx + y)}| = |e^{2i\pi y}|.|\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi kx}| = |\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi kx}| = |\frac{e^{2i\pi(n + 1)x} - 1}{e^{2i\pi x} - 1}| = |\frac{\sin((n + 1)\pi x)}{\sin(\pi x)}| \leq \frac{1}{|\sin(\pi x)|} \leq \frac{1}{2||x||}$.

II) Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in]a, +\infty[$, $f:[a, b] \to \mathbb{C}$, et $g \in C^1([a, b])$. On note $1_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq t \\ 0 & \text{si } n > t \end{cases}$ ($t \in [a, b]$).

1) Montrer que : $\sum_{n=a}^{E(b)} 1_n(t).f(n) = \sum_{n=a}^{E(t)} f(n)$.

$\sum_{n=a}^{E(b)} 1_n(t).f(n) = \sum_{n=a}^{E(t)} 1_n(t).f(n) + \sum_{n=E(t)+1}^{E(b)} 1_n(t).f(n) = \sum_{n=a}^{E(t)} f(n)$.

2) Pour $n \in [a, b]$, montrer que : $\int_a^b 1_n(t).g'(t)dt = g(b) - g(n)$.

$\int_a^b 1_n(t).g'(t)dt = \int_a^n 1_n(t).g'(t)dt + \int_n^b 1_n(t).g'(t)dt = \int_n^b g'(t)dt = g(b) - g(n)$.

3) En déduire que : $\sum_{n=a}^{E(b)} f(n)g(n) = (\sum_{n=a}^{E(b)} f(n)).g(b) - \int_a^b (\sum_{n=a}^{E(t)} f(n)).g'(t)dt$.

$\sum_{n=a}^{E(b)} f(n)).g(b) - \sum_{n=a}^{E(b)} f(n)g(n) = \sum_{n=a}^{E(b)} f(n)(g(b) - g(n)) = \sum_{n=a}^{E(b)} f(n).(\int_a^b 1_n(t).g'(t)dt) = \int_a^b (\sum_{n=a}^{E(b)} 1_n(t).f(n))g'(t)dt =$

$\sum_{n=a}^{E(b)} f(n)).g(b) - \sum_{n=a}^{E(b)} f(n)g(n) = \int_a^b (\sum_{n=a}^{E(t)} f(n)).g'(t)dt$, d'où la propriété.

4) Application : Écrire la formule précédente pour $a = 1$, $b = n \in \mathbb{N}^*$, $f(t) = 1$, $g(t) = \ln(t)$.

$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = (\sum_{k=1}^{n} 1).\ln(n) - \int_1^n (\sum_{k=1}^{E(t)} 1).\ln'(t)dt = \ln(n!) = n.\ln(n) - \int_1^n E(t).\ln'(t)dt$.

Finalement : $\ln(n!) = n.\ln(n) - \int_1^n \frac{E(t).dt}{t}$.

5) En déduire que, pour $n \geq 2$: $0 \leq \ln(n!) - n.\ln(n) + n - 1 < \ln(n)$, et pour n grand : $\ln(n!) \sim n.\ln(n/e)$.

De ce qui précède, comme $t - 1 < E(t) \leq t$, on déduit : $n.\ln(n) - \int_1^n \frac{(t - 1).dt}{t} > \ln(n!) \geq n.\ln(n) - \int_1^n dt$, d'où :

$n.\ln(n) - (n - 1 - \ln(n)) > \ln(n!) \geq n.\ln(n) - (n - 1)$; finalement :

$0 \leq \ln(n!) - n.\ln(n) + n - 1 < \ln(n)$.

Quand n assez grand : $n.(\ln(n) - 1 + 1/n) \leq \ln(n!) < n.(\ln(n) - 1 + 1/n + \ln(n)/n)$, c'est-à-dire :

$n.\ln(n/e)(1 + 1/n.\ln(n/e)) \leq \ln(n!) < n.\ln(n/e)(1 + 1/n.\ln(n/e) + \ln(n)/n.\ln(n/e))$. Donc : $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n.\ln(n/e)} = 1$, ce qui prouve l'équivalence entre les deux fonctions.