TSI2 / DM1-2009-2010.

On considère une suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (d° étant le degré) :

$$d°(L_n) = n,\ L_n(1) = 1,\ L_n' = X.L_{n-1}' + n.L_{n-1}.$$

I) 1) Donner les polynômes L_0, L_1, L_2.

2) Soit $u_n = \int_{-1}^{1} L_n(x).dx$; calculer $\int_{-1}^{1} L_n'(x).dx$, et en déduire que $L_n(-1) + L_{n-1}(-1) = (1 - n)u_{n-1}$.

3) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n(X) = \frac{1}{2^n}.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X - 1)^{n-k}(X + 1)^k$.

Montrer que $P_n(1) = 1$ et $P_n' = X.P_{n-1}' + n.P_{n-1}$. En déduire que $L_n = P_n$.

4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $L_n(-1) = (-1)^n$; et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 0$.

II) 1) Montrer que L_n a la même parité que n ($L_n(-X) = (-1)^n.L_n(X)$).

2) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. En déduire que X^{2n} est combinaison linéaire de $(L_0, L_2, ..., L_{2n})$ et X^{2n+1} est combinaison linéaire de $(L_1, L_3, ..., L_{2n+1})$.

3) Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_{-1}^{1} L_n(x)f(x).dx = 0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_{-1}^{1} x^{2n+1}f(x).dx = 0$.

4) Soit F_n la primitive de L_n qui s'annule en 0 ; montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_n(-1) = F_n(1).$$

Montrer que F_n est de parité inverse à n, et en déduire que $F_{2n}(-1) = F_{2n}(1) = 0$.

5) On note $L_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.X^{2k}$; montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2k+1} = 0$. En notant : $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x).dx$, montrer par récurrence que : $\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x).dx = \frac{a_0}{2n+1}$.

6) En déduire que : $\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi x)^{2k+1}}{(2k+1)!}.f(x)dx = 0$, et : $\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi x)^{2k}}{(2k)!}.f(x)dx = \frac{a_0}{n\pi}.\sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

7) On admet que ces deux dernières égalités restent vraies quand $N \to +\infty$; que reconnaît-on ?

8) *Réservé aux 5/2* : En déduire que les seules fonctions f convenables développables en séries de Fourier sont les fonctions constantes.