TSI2 / DM1-2009-2010 / corrigé.

On considère une suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (d° étant le degré) :

$$d°(L_n) = n,\ L_n(1) = 1,\ L'_n = X.L'_{n-1} + n.L_{n-1}.$$

I) 1) Donner les polynômes L_0, L_1, L_2.

- *Corrigé* : D'après la condition $d°(L_0)= 0$ et $L_0(1) = 1$, alors $L_0(X) = 1$.

$L_1(X) = aX + b$, $L_1(1) = a + b = 1$, $L'_1(X) = a = 1$, donc : $L_1(X) = X$.

$L_2(X) = aX^2 + bX + c$, $L_2(1) = a + b + c = 1$, $L'_2(X) = 2aX + b = X + 2X$, donc : $L_2(X) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.

2) Soit $u_n = \int_{-1}^{1} L_n(x).dx$; calculer $\int_{-1}^{1} L'_n(x).dx$, et en déduire que $L_n(-1) + L_{n-1}(-1) = (1 - n)u_{n-1}$.

- *Corrigé* : $\int_{-1}^{1} L'_n(x).dx = L_n(1) - L_n(-1) = 1 - L_n(-1) = \int_{-1}^{1} (x.L'_{n-1}(x) + n.L_{n-1}(x)).dx = [x.L_{n-1}(x)]_{-1}^{1} + (n - 1).u_{n-1}$.

(avec : $u = x \to u' = 1$, $v' = L'_{n-1} \to v = L_{n-1}$). D'où : $1 - L_n(-1) = 1 + L_{n-1}(-1) + (n - 1)u_{n-1} \Leftrightarrow L_n(-1) + L_{n-1}(-1) = (1 - n)u_{n-1}$.

3) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n(X) = \frac{1}{2^n}.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X - 1)^{n-k}(X + 1)^k$. Montrer que $P_n(1) = 1$ et $P'_n = X.P'_{n-1} + n.P_{n-1}$.
En déduire que $L_n = P_n$.

- *Corrigé* : Le seul terme non nul de la somme définissant $P_n(1)$ est celui pour lequel $k = n$, donc : $P_n(1) = 1$.

Ensuite : $P'_n(X) = \frac{1}{2^n}.(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^2 (X - 1)^{n-k-1}(X + 1)^{k-1}(nX - 2k) + n.(X- 1)^{n-1} + n.(X + 1)^{n-1})$;

$$X.P'_{n-1}(X) + n.P_{n-1}(X) = \frac{X}{2^{n-1}}.(\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-1}{k}^2 (X - 1)^{n-k-2}(X + 1)^{k-1}((n - 1)X - 2k) + (n - 1).(X- 1)^{n-2} + (n - 1).(X + 1)^{n-2})$$
$$+ \frac{n}{2^{n-1}}.\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 (X - 1)^{n-k-1}(X + 1)^k,$$

etc..

Chacune des deux suites étant entièrement déterminée par son degré, son premier terme et la récurrence (L_n est la primitive de $X.L'_{n-1} + n.L_{n-1}$ qui vaut 1 pour $x = 1$), les deux suites sont égales : $L_n = P_n$. (Il faut montrer que $d°(P_n) = n$).

4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $L_n(-1) = (-1)^n$; et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 0$.

- *Corrigé* : Le seul terme non nul de la somme définissant $P_n(-1)$ est celui pour lequel $k = 0$ (ce n'est pas parce qu'on connaîtrait la valeur de 0^0, qui n'existe pas, mais parce qu'il s'agit du terme constant), donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$L_n(-1) = P_n(-1) = (-1)^n.$$

Alors, si $n \geq 2$: $L_n(-1) + L_{n-1}(-1) = (1 - n)u_{n-1} = 0$, donc $u_{n-1} = 0$, et ainsi, pour tout $n \geq 1$: $u_n = 0$.

II) 1) Montrer que L_n a la même parité que n ($L_n(-X) = (-1)^n.L_n(X)$).

- *Corrigé* : $L_n(-X) = \frac{1}{2^n}.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-X - 1)^{n-k}(-X + 1)^k = \frac{1}{2^n}.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^{n-k}(X + 1)^{n-k}(-1)^k(X - 1)^k = (-1)^n.L_n(X)$ (en faisant le changement d'indice $k' = n - k$).

2) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. En déduire que X^{2n} est combinaison linéaire de $(L_0, L_2, ..., L_{2n})$ et X^{2n+1} est combinaison linéaire de $(L_1, L_3, ..., L_{2n+1})$.

- *Corrigé* : Comme $d°(L_n) = n$ c'est immédiatement une base. Les ensembles des polynômes pairs et impairs sont des sous-espaces supplémentaires dont les bases respectives sont $(L_0, L_2, ..., L_{2n}, ...)$ et $(L_1, L_3, ..., L_{2n+1}, ...)$

ce qui implique bien que, pour respecter les degrés, X^{2n} est combinaison linéaire de la première famille et X^{2n+1} de la seconde famille citées dans l'énoncé.

3) Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_{-1}^{1} L_n(x)f(x).dx = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_{-1}^{1} x^{2n+1}f(x).dx = 0$.

- *Corrigé* : C'est immédiat en remplaçant x^{2n+1} par sa combinaison linéaire dans $(L_1, L_3, ..., L_{2n+1})$.

4) Soit F_n la primitive de L_n qui s'annule en 0 ; montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $F_n(-1) = F_n(1)$. Montrer que F_n est de parité inverse à n, et en déduire que $F_{2n}(-1) = F_{2n}(1) = 0$.

- *Corrigé* : $\int_{-1}^{1} L_n(x).dx = F_n(1) - F_n(-1) = 0$. La primitive qui s'annule en 0 d'un polynôme pair est impaire et la primitive d'un polynôme impair est toujours paire, il suffit pour s'en convaincre de considérer les monômes un par un. Par suite F_n est de parité inverse à L_n, donc de parité inverse à n.

Il s'en suit que F_{2n} est impair, on a donc $F_{2n}(-1) = F_{2n}(1)$ et $F_{2n}(-1) = -F_{2n}(1)$, d'où : $F_{2n}(-1) = F_{2n}(1) = 0$.

5) On note $L_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.X^{2k}$; montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2k+1} = 0$. En notant : $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x).dx$, montrer par récurrence que : $\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x).dx = \frac{a_0}{2n+1}$.

- *Corrigé* : Il s'agit en fait de $F_{2n}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2k+1} = 0$. La propriété suivante est vraie au rang 0 et au rang 1 car $\int_{-1}^{1} f(x).dx = a_0$, et $\int_{-1}^{1} x^2.f(x)dx = \frac{2}{3}.\int_{-1}^{1} (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2})f(x).dx + \frac{1}{3}.\int_{-1}^{1} f(x).dx = \frac{2}{3}.\int_{-1}^{1} L_2(x)f(x).dx + \frac{1}{3}.a_0 = \frac{a_0}{3}$.

On la suppose vraie jusqu'au rang $n - 1$, c'est-à-dire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 = \int_{-1}^{1} L_{2n}(x)f(x).dx = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k.x^{2k}.f(x).dx + \int_{-1}^{1} \alpha_n x^{2n}f(x).dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k.\int_{-1}^{1} x^{2k}.f(x).dx + \alpha_n.\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x).dx =$$

$0 = a_0.\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{2k+1} + \alpha_n.\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x).dx = \frac{-a_0\alpha_n}{2n+1} + \alpha_n.\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x).dx$ (d'après la propriété précédente). Par suite, comme $\alpha_n \neq 0$, on a bien : $\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x).dx = \frac{a_0}{2n+1}$.

6) En déduire que : $\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi x)^{2k+1}}{(2k+1)!}.f(x)dx = 0$, et : $\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi x)^{2k}}{(2k)!}.f(x)dx = \frac{a_0}{n\pi}.\sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

- *Corrigé* : On entre le signe intégrale dans la première somme et le résultat est immédiat. Ce n'est pas beaucoup plus difficile pour la seconde somme :

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi)^{2k}}{(2k)!}.\int_{-1}^{1} x^{2k}.f(x)dx = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi)^{2k}}{(2k)!}.\frac{a_0}{2k+1} = \frac{a_0}{n\pi}.\sum_{k=0}^{N} (-1)^k.\frac{(n\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

7) On admet que ces deux dernières égalités restent vraies quand $N \to +\infty$; que reconnaît-on ?

- *Corrigé* : $\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k.\frac{(n\pi x)^{2k+1}}{(2k+1)!}.f(x)dx = \int_{-1}^{1} \sin(n\pi x).f(x)dx = 0$.

$$\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k.\frac{(n\pi x)^{2k}}{(2k)!}.f(x)dx = \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x).f(x)dx = ... = 0.$$

8) En déduire que les seules fonctions f convenables développables en séries de Fourier sont les fonctions constantes.

- *Corrigé* : Le seul coefficient de Fourier non nul est le premier, ce qui répond à la question.