TSI2 / DM2-2008-2009.

On note $E = \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, I la matrice identité de E, ainsi que les trois matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit aussi l'application ϕ sur E^2 : $\phi(A, B) = AB - BA$. (Crochet de Lie).

1) Montrer que ϕ est une application bilinéaire antisymétrique.

2) Montrer que pour tout triplet de matrices (A, B, C) de E^3 (identité de Jacobi) :

$$\phi(\phi(A, B), C) + \phi(\phi(B, C), A) + \phi(\phi(C, A), B) = 0.$$

3) *a*) Étant donnée une matrice A de E, et connaissant un vecteur propre u de A, associé à la valeur propre λ, et un vecteur propre v de ${}^tA$, associé à la valeur propre μ, en déduire une matrice M de E et un réel k tels que : $\phi(A, M) = k.M$.

b) *Application* : Donner les éléments propres de l'application f de $\mathscr{L}(E)$, définie par :

$$f(M) = \phi(A, M), \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) *a*) Soit $F = \mathrm{Vect}(J, K, L)$; montrer que les éléments de F sont des matrices antisymétriques.

b) Étant données deux matrices A et B quelconques de F, calculer $\phi(A, B)$.

c) Montrer qu'il existe un isomorphisme ψ de F dans $\mathbb{R}^3$, et que $\psi(\phi(A, B)) = 2.\psi(A)\wedge\psi(B)$. (Produit vectoriel usuel).

5) Calculer les produits JK, JL, KJ, KL, LJ, LK, J^2, K^2, L^2.

6) Soit $G = \mathrm{Vect}(I, J, K, L)$; *a*) montrer que, si A et B sont dans G, il en est de même de leur produit AB.

b) Montrer que toute matrice non nulle A de G est inversible et donner son inverse.

c) Résoudre $M^2 = -I$ dans G. (G est l'ensemble des quaternions).

7) Soit une matrice A de G définie par : $A = t.I + x.J + y.K + z.L$. On note $\overline{A} = t.I - x.J - y.K - z.L$, et $|A|$ le réel positif, s'il existe, tel que : $A\overline{A} = |A|^2.I$.

a) Étant données deux matrices A et B de G, montrer que : $|AB| = |A|.|B|$.

b) En déduire que si deux entiers naturels m et n sont sommes de quatre carrés d'entiers naturels, il en est de même de leur produit mn. (Cette propriété est une étape importante servant à démontrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés).

c) Calculer $|A|$ pour $A = \cos(a).I + \sin(a)(\cos(b).J + \sin(b)(\cos(c).K + \sin(c).L))$.

8) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et l'application Ψ, de G dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, définie par :

$$\Psi(t.I + x.J + y.K + z.L) = \begin{pmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2zt & 2xz + 2yt \\ 2xy + 2zt & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2xt \\ 2xz - 2yt & 2yz + 2xt & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Soit $A = t.I + x.J + y.K + z.L$ telle que $|A| = 1$, $M = \Psi(A)$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$; montrer que (u, v, w) est une famille orthogonale, puis calculer $M.u$, $M.v$ et $M.w$ en fonction de u, v et w.

b) Calculer $\det(\Psi(A))$ et montrer que les colonnes de $\Psi(A)$ forment une base orthonormale.

c) *Question réservée aux 5/2* : En déduire que $\Psi(A)$ est la matrice d'une rotation et, en notant $t = \cos(a)$, montrer que l'angle de la rotation est $\pm 2a$, et son axe $\mathrm{Vect}(u)$.