

TSI2 / DM2-2008-2009 / corrigé.

On note $E = \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, I la matrice identité de E , ainsi que les trois matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit aussi l'application ϕ sur E^2 : $\phi(A, B) = AB - BA$. (Crochet de Lie).

1) Montrer que ϕ est une application bilinéaire antisymétrique.

- *Corrigé* : Évident, il suffit d'écrire les égalités.

2) Montrer que pour tout triplet de matrices (A, B, C) de E^3 (identité de Jacobi) :

$$\phi(\phi(A, B), C) + \phi(\phi(B, C), A) + \phi(\phi(C, A), B) = 0.$$

- *Corrigé* : $(AB - BA)C - C(AB - BA) + (BC - CB)A - A(BC - CB) + (CA - AC)B - B(CA - AC) = \dots = 0$.

3) a) Étant donnée une matrice A de E , et connaissant un vecteur propre u de A , associé à la valeur propre λ , et un vecteur propre v de tA , associé à la valeur propre μ , en déduire une matrice M de E et un réel k tels que : $\phi(A, M) = k.M$.

- *Corrigé* : $Au = \lambda u$ et ${}^tAv = \mu v$, ou encore ${}^tvA = \mu{}^tv$, donc : $Au{}^tv - u{}^tvA = (\lambda - \mu)u{}^tv$. Conclusion : $M = u{}^tv$ et $k = \lambda - \mu$. Il reste à justifier que M est bien dans E .

b) *Application* : Donner les éléments propres de l'application f de $\mathcal{L}(E)$, définie par :

$$f(M) = \phi(A, M), \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- *Corrigé* : Les éléments propres de A sont, en notant C_i la i -ème colonne : $u_1 = C_1 + C_2$, associé à la valeur propre 1 ; $u_2 = C_1 - C_2$, associé à la valeur propre -1 ; $u_3 = C_3 + C_4$, associé à la valeur propre -1 ; $u_4 = C_3 - C_4$, associé à la valeur propre 1 . Les éléments propres de f sont donc :

$$\lambda_{11} = \lambda_{14} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = \lambda_{33} = \lambda_{41} = \lambda_{44} = 0 : \quad u_1{}^tu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_1{}^tu_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2{}^tu_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u_2{}^tu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3{}^tu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3{}^tu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_4{}^tu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4{}^tu_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{42} = \lambda_{43} = 2 : \quad u_1{}^tu_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_1{}^tu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4{}^tu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4{}^tu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_{21} = \lambda_{24} = \lambda_{31} = \lambda_{34} = -2 : \quad u_2{}^tu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2{}^tu_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3{}^tu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3{}^tu_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) a) Soit $F = \text{Vect}(J, K, L)$; montrer que les éléments de F sont des matrices antisymétriques.

- *Corrigé* : ${}^t(x.J + y.K + z.L) = x.{}^tJ + y.{}^tK + z.{}^tL = -x.J - y.K - z.L = -(x.J + y.K + z.L)$, ce qui prouve l'assertion.

b) Étant données deux matrices A et B quelconques de F , calculer $\phi(A, B)$.

- *Corrigé* : $\phi(x.J + y.K + z.L, x'.J + y'.K + z'.L) = 2((yz' - zy').J + (zx' - xz').K + (xy' - yx').L)$.

c) Montrer qu'il existe un isomorphisme ψ de F dans \mathbb{R}^3 , et que $\psi(\phi(A, B)) = 2.\psi(A)\wedge\psi(B)$. (Produit vectoriel usuel).

- *Corrigé* : $\psi: x.J + y.K + z.L \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et on a bien : $\psi(\phi(x.J + y.K + z.L, x'.J + y'.K + z'.L)) = 2.\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$. (Tout ceci étant à justifier convenablement).

5) Calculer les produits $JK, JL, KJ, KL, LJ, LK, JKL, J^2, K^2, L^2$.

- *Corrigé* : $JK = -KJ = L$; $KL = -LK = J$; $LJ = -JL = K$; $JKL = I$; $J^2 = K^2 = L^2 = -I$.

6) Soit $G = \text{Vect}(I, J, K, L)$; a) montrer que, si A et B sont dans G , il en est de même de leur produit AB .

- *Corrigé* : $(t.I + x.J + y.K + z.L)(t'.I + x'.J + y'.K + z'.L) =$
 $(tt' - xx' - yy' - zz').I + (tx' + xt' + yz' - zy').J + (ty' + yt' + zx' - xz').K + (tz' + zt' + xy' - yx').L.$

b) Montrer que toute matrice non nulle A de G est inversible et donner son inverse.

- *Corrigé* : On peut résoudre un système à partir du résultat précédent, en remarquant que si A est non nulle, il en est de même de $t^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Mais il est plus rapide d'anticiper sur la question suivante en repensant aux complexes : $A\bar{A} = |A|^2.I$, signifie que : $I = A.\frac{\bar{A}}{|A|^2}$, d'où : $A^{-1} = \frac{\bar{A}}{|A|^2}$.

$$(t.I + x.J + y.K + z.L)^{-1} = \frac{t}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}.I + \frac{-x}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}.J + \frac{-y}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}.K + \frac{-z}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}.L.$$

c) Résoudre $M^2 = -I$ dans G . (G est l'ensemble des quaternions).

- *Corrigé* : $(t^2 - x^2 - y^2 - z^2).I + 2tx.J + 2ty.K + 2tz.L = -I$, donc : $t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Les solutions sont donnés par les points de la sphère unité de \mathbb{R}^3 : $t = 0$, $x = \cos(\theta)\sin(\varphi)$, $y = \sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z = \cos(\varphi)$.

7) Soit une matrice A de G définie par : $A = t.I + x.J + y.K + z.L$. On note $\bar{A} = t.I - x.J - y.K - z.L$, et $|A|$ le réel positif, s'il existe, tel que : $A\bar{A} = |A|^2.I$.

a) Étant données deux matrices A et B de G , montrer que : $|AB| = |A|.|B|$.

- *Corrigé* : Après quelques calculs, on arrive effectivement à l'égalité souhaitée, au carré :

$$(tt' - xx' - yy' - zz')^2 + (tx' + xt' + yz' - zy')^2 + (ty' + yt' + zx' - xz')^2 + (tz' + zt' + xy' - yx')^2 =$$

$$(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)(t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Mais il est plus rapide d'écrire : $A\bar{A}.B\bar{B} = (|A|.|B|)^2.I = AB.\bar{A}\bar{B} = |AB|^2.I$ car les matrices de G commutent, d'où le résultat.

b) En déduire que si deux entiers naturels m et n sont sommes de quatre carrés d'entiers naturels, il en est de même de leur produit mn . (Cette propriété est une étape importante servant à démontrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés).

- *Corrigé* : C'est exactement l'égalité précédente pour $m = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$, et $n = t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$.

c) Calculer $|A|$ pour $A = \cos(a).I + \sin(a)(\cos(b).J + \sin(b)(\cos(c).K + \sin(c).L))$.

- *Corrigé* : $\cos^2(a) + \sin^2(a)(\cos^2(b) + \sin^2(b)(\cos^2(c) + \sin^2(c))) = \dots = 1$.

8) On considère l'application Ψ , de G dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par :

$$\Psi(t.I + x.J + y.K + z.L) = \begin{pmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2zt & 2xz + 2yt \\ 2xy + 2zt & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2xt \\ 2xz - 2yt & 2yz + 2xt & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = t.I + x.J + y.K + z.L$ telle que $|A| = 1$, $M = \Psi(A)$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$; montrer que

(u, v, w) est une famille orthogonale, puis calculer $M.u, M.v$ et $M.w$ en fonction de u, v et w .

- *Corrigé* : On vérifie aisément que la famille (u, v, w) est orthogonale.

$$M.u = u ; M.v = (2t^2 - 1).v + 2t.w ; M.w = 2t(t^2 - 1).v + (2t^2 - 1).w.$$

b) Calculer $\det(\Psi(A))$ et montrer que les colonnes de $\Psi(A)$ forment une base orthonormale.

- *Corrigé* : Après un long calcul $\det(\Psi(A)) = 1$ et on a bien une base orthonormale.

c) *Question réservée aux 5/2* : En déduire que $\Psi(A)$ est la matrice d'une rotation et, en notant $t = \cos(a)$, montrer que l'angle de la rotation est $\pm 2a$, et son axe $\text{Vect}(u)$.

- *Corrigé* : C'en est une par définition. En outre, en écrivant : $M.v/\|v\| = \cos(\theta).v/\|v\| + \sin(\theta).w/\|w\|$, on a $\cos(\theta) = 2t^2 - 1$ et $\sin(\theta) = 2t\sqrt{1 - t^2}$.

Alors, si $t = \cos(a)$, on obtient : $\cos(\theta) = \cos(2a)$ et $\sin(\theta) = \pm \sin(2a)$, d'où $\theta = \pm 2a$. Et comme u est invariant et non nul, il dirige l'axe de la rotation.