

## TSI2 / DM2-2009-2010.

- *Définitions* : Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de sa diagonale. En dimension finie, le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de sa matrice dans toute base ; il conviendra donc ici de trouver une base dans laquelle la matrice est triangulaire.

On considère  $E = \mathbb{R}[X]$ , muni de sa base canonique  $B = (1, X, \dots, X^n, \dots)$ , l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à l'entier naturel  $n$  est noté  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ , et  $GL(E)$  désigne l'ensemble des automorphismes de  $E$  (son groupe linéaire). Enfin, on note  $S$  l'ensemble des éléments  $\phi$  de  $GL(E)$  tels que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\phi$  est stable sur  $E_n$ .

Étant donné un élément  $\phi$  de  $S_n$ , on note  $\phi_n$  sa restriction à  $E_n$ . Enfin, on note  $\Delta_\phi$  la limite lorsqu'elle existe :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \det(\phi_n) = \Delta_\phi$  qui, lorsqu'il existe, est un élément de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . On note  $G_0$  l'ensemble des éléments  $\phi$  de  $S$  tels que  $\Delta_\phi = 0$ ,  $G_1$  l'ensemble des éléments  $\phi$  de  $S$  tels que  $\Delta_\phi \in \mathbb{R}^*$ ,  $G_2$  l'ensemble des éléments  $\phi$  de  $S$  tels que  $\Delta_\phi = \pm\infty$ .

1) Montrer qu'une homothétie de rapport  $k$  non nul et strictement supérieur à  $-1$  est un élément de  $S$ , et déterminer en fonction des valeurs de  $k$  les homothéties de  $G_0, G_1, G_2$ .

2) a) Montrer que si  $\phi$  est un élément de  $S$ , alors  $\phi(X^n)$  est un polynôme de degré  $n$ .

b) On note  $\alpha_n$  le coefficient dominant de  $\phi(X^n)$  ; montrer que si  $\phi$  est un élément de  $S$ , alors :  $\Delta_\phi = \prod_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ .

c) Montrer que si  $\phi \in G_1 \cup G_2$ , alors tous les  $\alpha_n$  sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

3) a) Montrer que si  $\phi$  et  $\psi$  sont des éléments de  $G_0 \cup G_1$ , alors  $\Delta_{\phi \circ \psi} = \Delta_\phi \cdot \Delta_\psi$ .

b) Même question dans  $G_1 \cup G_2$ . Montrer qu'il existe des contre exemples dans  $G_0 \cup G_2$  (en donner un).

c) Montrer que  $G_0, G_1$  et  $G_2$  sont chacun d'entre eux stables par composition ;  $G_0 \cup G_1 \cup G_2$  est-il stable par composition ?

d) Montrer que  $G_1$  est un groupe muni de la composition.

e) Montrer que les inverses des éléments de  $G_2$  sont dans  $G_0$ . Donner un élément de  $G_0$  dont l'inverse n'est pas dans  $G_0 \cup G_1 \cup G_2$ .

4) Étant donné  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $\phi_{a,b}$  l'application qui à un polynôme  $P$  associe  $Q$  tel que,  $\phi_{a,b}(P) = Q$ , où  $Q(X) = P(aX + b)$ .

a) Montrer que  $\phi_{1,b}$  est un élément de  $G_1$ . Qu'en est-il de  $\phi_{-1,0}$  ?

b) Déterminer les réels  $a$  tels que  $\phi_{a,b}$  est un élément de  $G_0 \cup G_1 \cup G_2$ .

c) Dans le cas où  $\phi_{a,b}$  est un élément de  $G_0 \cup G_1 \cup G_2$ , déterminer en fonction de  $a$  les éléments de  $G_0, G_1, G_2$ .

d) En notant  $h_k$  l'homothétie de rapport  $k$  non nul, déterminer les éléments de  $G_0 \cup G_1 \cup G_2$  de la forme  $h_k \circ \phi_{a,b}$ , en donnant plus précisément ceux de  $G_0, G_1, G_2$ .

e) Soit  $p$  la projection sur  $\text{Vect}(\phi_{1,1}(X^2))$  parallèlement à  $\text{Vect}(\phi_{1,1}(1), \phi_{1,1}(X), \phi_{1,1}(X^3), \phi_{1,1}(X^4), \phi_{1,1}(X^5), \dots)$ . Calculer  $p(X)$ .

5) On définit les endomorphismes suivants de  $E$ , avec  $\lambda \in ]\sqrt{e}, +\infty[$  et  $q = 1 - 1/\ln(\lambda)$ , pour tout entier naturel  $n$  :  $\psi_\lambda(X^n) = e^{(q^n)} \cdot X^n$ , et  $\psi_{-\lambda}(X^n) = e^{(-q^n)} \cdot X^n$ . Soit  $\lambda \in ]\sqrt{e}, +\infty[$  quelconque.

a) Montrer que  $\psi_\lambda$  et  $\psi_{-\lambda}$  sont bijectives.

b) Calculer  $\Delta_{\psi_\lambda}$  et  $\Delta_{\psi_{-\lambda}}$  en fonction de  $\lambda$  ; à quels ensembles définis précédemment appartiennent  $\psi_\lambda$  et  $\psi_{-\lambda}$  ?

c) Soit  $\mu \in ]\sqrt{e}, +\infty[$  ; montrer que :

$$\Delta_{\psi_\lambda \circ \psi_\mu} = \Delta_{\psi_\lambda} \cdot \Delta_{\psi_\mu}, \quad \Delta_{\psi_{-\lambda} \circ \psi_\mu} = \Delta_{\psi_{-\lambda}} \cdot \Delta_{\psi_\mu}, \quad \Delta_{\psi_\lambda \circ \psi_{-\mu}} = \Delta_{\psi_\lambda} \cdot \Delta_{\psi_{-\mu}}, \quad \Delta_{\psi_{-\lambda} \circ \psi_{-\mu}} = \Delta_{\psi_{-\lambda}} \cdot \Delta_{\psi_{-\mu}}.$$

d) Donner un élément  $\phi$  de  $G_1$  tel que  $\Delta_\phi = \sqrt{e}$ .

6) Soit  $\phi$  l'endomorphisme tel que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\phi(X^{2n}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{(q^{2n})} \cdot X^{2n}(1+X) + e^{(q^{2n+1})} \cdot X^{2n}(1-X)),$$

$$\phi(X^{2n+1}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{(q^{2n})} \cdot X^{2n}(1+X) - e^{(q^{2n+1})} \cdot X^{2n}(1-X)), \text{ où } q \in ]-1, 1[.$$

a) Soit  $e_{2n} = X^{2n}(1+X)$  et  $e_{2n+1} = X^{2n}(1-X)$  ; montrer que  $B' = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $E$ .

b) Calculer  $\phi(e_{2n})$  et  $\phi(e_{2n+1})$  ; en déduire que  $F_n = \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$  est stable par  $\phi$ .

c) Soit  $\phi_n$  la restriction de  $\phi$  à  $F_n$  ; calculer  $\det(\phi_n)$ .

d) En déduire qu'il est possible de déterminer  $\Delta_\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(\phi_n)$ .

7) Soit  $\phi$  l'endomorphisme tel que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\phi(X^{2n}) = X^{2n+2}, \quad \phi(X^{2n+3}) = X^{2n+1}, \quad \phi(X) = 1.$$

a) Montrer que  $\phi$  est bijective.

b) Montrer que  $\phi$  n'admet pas de polynôme propre (vecteur propre), même à coefficients complexes.