TSI2 / DM2-2009-2010 / corrigé.

- *Définitions* : Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de sa diagonale. En dimension finie, le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de sa matrice dans toute base ; il conviendra donc ici de trouver une base dans laquelle la matrice est triangulaire.

On considère $E = \mathbb{R}[X]$, muni de sa base canonique $B = (1, X, ..., X^n, ...)$, $E_n = \mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}((1, X, ..., X^n)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à l'entier naturel n, et $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E (son groupe linéaire). Enfin, on note S l'ensemble des éléments ϕ de $GL(E)$ tels que pour tout entier naturel n, ϕ est stable sur E_n.

Étant donné un élément ϕ de S_n, on note ϕ_n sa restriction à E_n. Enfin, on note Δ_ϕ la limite lorsqu'elle existe : $\lim\limits_{n\to\infty} \det(\phi_n) = \Delta_\phi$ qui, lorsqu'il existe, est un élément de $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. On note G_0 l'ensemble des éléments ϕ de S tels que $\Delta_\phi = 0$, G_1 l'ensemble des éléments ϕ de S tels que $\Delta_\phi \in \mathbb{R}^*$, G_2 l'ensemble des éléments ϕ de S tels que $\Delta_\phi = \pm\infty$.

1) Montrer qu'une homothétie de rapport k non nul et strictement supérieur à -1 est un élément de S, et déterminer en fonction des valeurs de k les homothéties de G_0, G_1, G_2.

- *Corrigé* : Comme $X^n \mapsto k.X^n$, $\det(\phi_n) = k^{n+1}$. En notant h_k l'homothétie de rapport $k > -1$, si $k \in]-1, 1[\setminus\{0\}$ alors $\Delta_{h_k} = 0$ donc $h_k \in G_0$; si $k = 1$ alors $\Delta_{h_1} = 1$, donc $h_1 \in G_1$; et si $k > 1$ alors $\Delta_{h_k} = +\infty$ et $h_k \in G_2$.

2) *a*) Montrer que si ϕ est un élément de S, alors $\phi(X^n)$ est un polynôme de degré n.

b) On note α_n le coefficient dominant de $\phi(X^n)$; montrer que si ϕ est un élément de S, alors : $\Delta_\phi = \prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$.

c) Montrer que si $\phi \in G_1\cup G_2$, alors tous les α_n sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

- *Corrigé* : *a*) Soit $\phi \in S$; alors, pour tout n, $d°(\phi(X^n)) \le n$ car ϕ est stable sur $\mathbb{R}_n[X]$. Mais comme ϕ est bijective, alors $(\phi(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E ; on démontre la fin par récurrence :

> $\phi(1)$ est une base de $\mathbb{R}$, donc $\phi(1) \neq 0$; alors : $d°(\phi(1)) = 0$.
> On suppose que pour tout $k \le n$: $d°(\phi(X^k)) = k$.
> Au rang $n + 1$: $d°(\phi(X^{n+1})) \le n + 1$, et $(\phi(X^k))_{0\le k\le n+1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
> Comme X^{n+1} s'exprime dans cette base, ce n'est possible que s'il y a un polynôme de degré $n + 1$ dans la base, ce qui ne peut se faire que si $d°(\phi(X^{n+1})) = n + 1$, les autres éléments de la base étant tous de degrés strictement inférieurs.

On a bien démontré que pour tout entier naturel n : $d°(\phi(X^n)) = n$.

b) On montre par récurrence que $\det(\phi_n) = \prod\limits_{k=0}^{n} \alpha_k$:

> Il est évident que $\det(\phi_0) = \det(\alpha_0) = \alpha_0$.
> On suppose que $\det(\phi_n) = \det(\alpha_0, \alpha_1 X, ..., \alpha_n X^n) = \prod\limits_{k=0}^{n} \alpha_k$.
> Au rang $n + 1$: $\det(\phi_{n+1}) = \det(\phi(1), \phi(X), ..., \phi(X^n), \phi(X^{n+1})) =$
> $\det(\alpha_0, \alpha_1 X, ..., \alpha_n X^n, \alpha_{n+1}X^{n+1} + P(X))$ (où $d°(P) = n$) $=$
> $\det(\alpha_0, \alpha_1 X, ..., \alpha_n X^n, \alpha_{n+1}X^{n+1}) + \det(\alpha_0, \alpha_1 X, ..., \alpha_n X^n, P(X)) =$
> $\det(\alpha_0, \alpha_1 X, ..., \alpha_n X^n, \alpha_{n+1}X^{n+1}) = \prod\limits_{k=0}^{n+1} \alpha_k$.

On a ainsi montré que $\det(\phi_n) = \prod\limits_{k=0}^{n} \alpha_k$ pour tout n.

- *Autre démonstration* : En utilisant la matrice de ϕ_n qui est triangulaire dans la base $(1, X, ..., X^n)$.

Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \det(\phi_n) = \Delta_\phi$ existe, ce qui est attesté par l'appartenance de ϕ à S, alors le produit admet aussi une limite donc : $\Delta_\phi = \prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$.

c) S'il y a une infinité de α_n strictement négatifs, alors il est impossible de déterminer le signe du produit ; la suite $(\prod\limits_{k=0}^{n} \alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}$ change de signe une infinité de fois et n'admet pas de limite. Il n'y en a donc qu'un nombre fini ; ce qui implique qu'après le dernier négatif, tous les suivants sont strictement positifs.

3) *a*) Montrer que si ϕ et ψ sont des éléments de $G_0\cup G_1$, alors $\Delta_{\phi o\psi} = \Delta_\phi.\Delta_\psi$.
b) Même question dans $G_1\cup G_2$. Montrer qu'il existe des contre exemples dans $G_0\cup G_2$ (en donner un).
c) Montrer que G_0, G_1 et G_2 sont chacun d'entre eux stables par composition ; $G_0\cup G_1\cup G_2$ est-il stable par composition ?
d) Montrer que G_1 est un groupe muni de la composition.
e) Montrer que les inverses des éléments de G_2 sont dans G_0. Donner un élément de G_0 dont l'inverse n'est pas dans $G_0\cup G_1\cup G_2$.

- *Corrigé* : *a*) $\phi \in G_0\cup G_1 \Leftrightarrow \Delta_\phi \in \mathbb{R}$, idem pour ψ ; on note β_n le coefficient dominant de $\psi(X^n)$.D'après la question précédente il suffit de connaître le coefficient dominant de $\phi o\psi(X^n)$ qui est aussi celui de $\phi(\beta_n X^n)$, c'est-à-dire celui de $\beta_n.\phi(X^n)$ qui vaut donc $\alpha_n\beta_n$. Il en résulte que : $\Delta_{\phi o\psi} = \prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n = (\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n)(\prod\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n) = \Delta_\phi.\Delta_\psi$.

b) La démonstration repose sur le fait qu'aucun des produits $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ et $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$ n'est nul, ce qui évite le problème d'une indétermination $0.\infty$. Si les deux produits sont finis la démonstration de la question précédente reste valide ; il faut donc supposer qu'au moins l'un des deux produits est infini, par exemple le produit des β_k. On peut en outre supposer que tous les α_k et les β_k sont strictement positifs car la règle des signes est respectée. Alors : $(\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n)(\prod\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n) = +\infty$; il faut montrer qu'il en est de même de $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n$.

- Si $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in\ ]0, +\infty[$, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln(\alpha_n) \in \mathbb{R}$, c'est une série numérique convergente, donc son terme général tend vers 0 : $\ln(\alpha_n) \to 0 \Rightarrow \alpha_n \to 1$. Donc, à partir d'un certain rang $\alpha_n\beta_n \sim \beta_n$, ce qui prouve que $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ tend bien vers $+\infty$.

- Si $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, avec le même raisonnement, à partir d'un certain rang $\alpha_n \geq 1$, donc $\alpha_n\beta_n \geq \beta_n$, ce qui prouve que $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ tend toujours vers $+\infty$.

La proposition est donc vraie.

Il faut donner un contre exemple dans $G_0\cup G_2$: Pour $\phi(X^n) = \frac{-1}{n+1}.X^n$ alors $\phi \in G_0$; pour $\psi(X^n) = (n+1).X^n$ alors $\psi \in G_2$. Mais le terme dominant de $\phi o\psi(X^n)$ est -1, donc $\Delta_{\phi o\psi}$ n'existe pas car on ne peut pas faire un produit infini de -1, et ainsi $\phi o\psi \notin G_0\cup G_1\cup G_2$.

c) D'après les deux questions précédentes, si ϕ et ψ sont dans G_0, alors $\Delta_{\phi o\psi} = \Delta_\phi.\Delta_\psi = 0$, donc $\phi o\psi \in G_0$. De même, si ϕ et ψ sont dans G_1, alors $\Delta_{\phi o\psi} = \Delta_\phi.\Delta_\psi \in \mathbb{R}^*$, donc $\phi o\psi \in G_1$. Enfin, si ϕ et ψ sont dans G_2, alors $\Delta_{\phi o\psi} = \Delta_\phi.\Delta_\psi = \pm\infty$, donc $\phi o\psi \in G_2$. Ces trois ensembles sont stables par composition.
Mais $G_0\cup G_1\cup G_2$ n'est pas stable par composition, en prenant le même contre exemple qu'à la question précédente.

d) Pour montrer que G_1 est un groupe muni de la composition, on montre qu'il est un sous-groupe de $GL(E)$; il faut donc qu'il soit non vide, ce qui est le cas car il contient id_E, stable par composition, ce qui a été établi à la question précédente, et qu'il contienne les inverses de tous ses éléments : D'après la question 3*a*), le coefficient dominant de $\phi^{-1}(X^n)$ est $1/\alpha_n$, donc $\Delta_{\phi^{-1}} = \prod\limits_{n=0}^{\infty} 1/\alpha_n = 1/\prod\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}^*$, donc $\phi^{-1} \in G_1$.
G_1 est bien un groupe muni de la composition.

e) Si $\phi \in G_2$, $\Delta_{\phi^{-1}} = \prod_{n=0}^{\infty} 1/\alpha_n = 1/\prod_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 0$, donc $\phi^{-1} \in G_0$.

Pour $\phi(X^n) = \frac{(-1)^n}{n}.X^n$ alors $\phi \in G_0$ mais $\phi^{-1}(X^n)$ admet pour coefficient dominant $(-1)^n.X^n$, ce n'est donc pas un élément de $G_0 \cup G_1 \cup G_2$.

4) Étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $\phi_{a,b}$ l'application qui à un polynôme P associe Q tel que, $\phi_{a,b}(P) = Q$, où $Q(X) = P(aX + b)$.
a) Montrer que $\phi_{1,b}$ est un élément de G_1. Qu'en est-il de $\phi_{-1,0}$?
b) Déterminer les réels a tels que $\phi_{a,b}$ est un élément de $G_0 \cup G_1 \cup G_2$.
c) Dans le cas où $\phi_{a,b}$ est un élément de $G_0 \cup G_1 \cup G_2$, déterminer en fonction de a les éléments de G_0, G_1, G_2.
d) En notant h_k l'homothétie de rapport k non nul, déterminer les éléments de $G_0 \cup G_1 \cup G_2$ de la forme $h_k \circ \phi_{a,b}$, en donnant plus précisément ceux de G_0, G_1, G_2.
e) Soit p la projection sur $\mathrm{Vect}(\phi_{1,1}(X^2))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\phi_{1,1}(1), \phi_{1,1}(X), \phi_{1,1}(X^3), \phi_{1,1}(X^4), \phi_{1,1}(X^5), ...)$. Calculer $p(X)$.

- *Corrigé* : *a*) Le coefficient dominant de $\phi_{1,b}(X^n) = (X + b)^n$ est 1 ; il s'en suit que $\Delta_{\phi_{1,b}} = 1$. C'est bien un élément de G_1.
$\phi_{-1,0}$ n'est pas dans $G_0 \cup G_1 \cup G_2$ car on ne peut pas faire un produit infini de -1 (les termes de puissances impaires).

b) Le coefficient dominant ne dépend pas de b et vaut a^n ; il est donc impossible que $a \leq -1$; ainsi : $\phi_{a,b} \in G_0 \cup G_1 \cup G_2$ si et seulement si $a > -1$ et $a \neq 0$ (pour la bijectivité).

c) Si $a \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, alors $\phi_{a,b} \in G_0$; si $a = 1$, alors $\phi_{a,b} \in G_1$; et si $a > 1$, alors $\phi_{a,b} \in G_2$, c'est le même résultat que pour les homothéties.

d) Le coefficient dominant de $h_k \circ \phi_{a,b}(X^n)$ est $k.a^n$; il faut donc avoir $k.a^n > -1$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que :

Si $a \leq -1$, $h_k \circ \phi_{a,b} \notin G_0 \cup G_1 \cup G_2$.
Si $a \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $h_k \circ \phi_{a,b} \in G_0$.
Si $a = 1$, on est dans la configuration de la première question.
Si $a > 1$, si $k < 0$, $h_k \circ \phi_{a,b} \notin G_0 \cup G_1 \cup G_2$.
si $k > 0$, $h_k \circ \phi_{a,b} \in G_2$.

e) Il est évident que $p(X) = \lambda.\phi_{1,1}(X^2) = \lambda.(X + 1)^2$ et $X - p(X) \in \mathrm{Vect}(\phi_{1,1}(1), \phi_{1,1}(X), \phi_{1,1}(X^3), \phi_{1,1}(X^4), ...)$, où λ est un réel à déterminer.

Donc : $-\lambda.X^2 + (1 - 2\lambda).X - \lambda = \alpha.\phi_{1,1}(1) + \beta.\phi_{1,1}(X)$ (car les autres $\phi_{1,1}(X^k)$ sont de degrés trop élevés).

$-\lambda.X^2 + (1 - 2\lambda).X - \lambda = \alpha.1 + \beta.(X + 1) \Leftrightarrow \lambda.X^2 + (2\lambda + \beta - 1).X + \lambda + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,\ \alpha = -1,\ \beta = 1.$

Autrement dit : $X = -1 + (X + 1)$ est déjà dans $\mathrm{Vect}(\phi_{1,1}(1), \phi_{1,1}(X), \phi_{1,1}(X^3), \phi_{1,1}(X^4), ...)$, il est donc normal que $p(X) = 0_E$.

5) On définit les endomorphismes suivants de E, pour $\lambda \in]\sqrt{e}, +\infty[$, en posant $q = 1 - 1/\ln(\lambda)$, pour tout entier naturel n : $\psi_\lambda(X^n) = e^{(q^n)}.X^n$, et $\psi_{-\lambda}(X^n) = e^{(-q^n)}.X^n$. Soit $\lambda \in]\sqrt{e}, +\infty[$ quelconque.
a) Montrer que ψ_λ et $\psi_{-\lambda}$ sont bijectives.
b) Calculer Δ_{ψ_λ} et $\Delta_{\psi_{-\lambda}}$ en fonction de λ ; à quels ensembles définis précédemment appartiennent ψ_λ et $\psi_{-\lambda}$?
c) Soit $\mu \in]\sqrt{e}, +\infty[$; montrer que :

$$\Delta_{\psi_\lambda \circ \psi_\mu} = \Delta_{\psi_\lambda}.\Delta_{\psi_\mu},\ \Delta_{\psi_{-\lambda} \circ \psi_\mu} = \Delta_{\psi_{-\lambda}}.\Delta_{\psi_\mu},\ \Delta_{\psi_\lambda \circ \psi_{-\mu}} = \Delta_{\psi_\lambda}.\Delta_{\psi_{-\mu}},\ \Delta_{\psi_{-\lambda} \circ \psi_{-\mu}} = \Delta_{\psi_{-\lambda}}.\Delta_{\psi_{-\mu}}.$$

d) Donner un élément ϕ de G_1 tel que $\Delta_\phi = \sqrt{e}$.

- *Corrigé* : *a*) Il est simple de montrer qu'elles sont inverses l'une de l'autre, à savoir, pour tout entier naturel n : $\psi_\lambda \circ \psi_{-\lambda}(X^n) = \psi_{-\lambda} \circ \psi_\lambda(X^n) = X^n$.

b) On détermine d'abord dans quel ensemble est q :

$\lambda > \sqrt{e} \Rightarrow \ln(\lambda) > \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{\ln(\lambda)} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{-1}{\ln(\lambda)} < 0 \Rightarrow -1 < q < 1.$

Ainsi : $\Delta_{\psi_\lambda} = \prod_{n=0}^{\infty} e^{(q^n)} = \exp(\sum_{n=0}^{\infty} q^n) = e^{1/(1-q)} = \lambda$. De même : $\Delta_{\psi_{-\lambda}} = 1/\lambda$.

On a donc : $\psi_\lambda \in S$, $\psi_{-\lambda} \in S$, et $\psi_\lambda \in G_1$, $\psi_{-\lambda} \in G_1$.

c) Pour tout entier naturel n : $\psi_\lambda \circ \psi_\mu(X^n) = e^{(q^n + r^n)}.X^n$, où $r = 1 - 1/\ln(\mu)$. Le résultat s'en déduit immédiatement : $\Delta_{\psi_\lambda \circ \psi_\mu} = \Delta_{\psi_\lambda}.\Delta_{\psi_\mu} = \lambda\mu$. De même pour les trois autres.

d) Si à la place de e on met un réel strictement positif a dans l'expression de $\psi_\lambda(X^n)$, on obtient $\Delta_\phi = \lambda^{\ln(a)}$; il suffit donc, par exemple, de prendre $\lambda = a = e^{1/\sqrt{2}}$ pour obtenir le résultat souhaité, à savoir, pour tout entier naturel n : $\phi(X^n) = e^{(1-\sqrt{2})^n/\sqrt{2}}.X^n$.

6) Soit ϕ l'endomorphisme tel que pour tout entier naturel n : $\phi(X^{2n}) = \frac{1}{2}.(e^{(q^{2n})}.X^{2n}(1 + X) + e^{(q^{2n+1})}.X^{2n}(1 - X))$, $\phi(X^{2n+1}) = \frac{1}{2}.(e^{(q^{2n})}.X^{2n}(1 + X) - e^{(q^{2n+1})}.X^{2n}(1 - X))$, où $q \in]-1, 1[$.
a) Soit $e_{2n} = X^{2n}(1 + X)$ et $e_{2n+1} = X^{2n}(1 - X)$; montrer que $B' = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
b) Calculer $\phi(e_{2n})$ et $\phi(e_{2n+1})$; en déduire que $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1,..., e_n)$ est stable par ϕ.
c) Soit ϕ_n la restriction de ϕ à F_n ; calculer $\det(\phi_n)$.
d) En déduire qu'il est possible de déterminer $\Delta_\phi = \lim_{n\to\infty} \det(\phi_n)$.

- *Corrigé* : *a*) $X^{2n} = \frac{1}{2}.(e_{2n} + e_{2n+1})$, $X^{2n+1} = \frac{1}{2}.(e_{2n} - e_{2n+1})$; la base canonique peut s'exprimer dans B' de manière unique, ce qui prouve que B' est aussi une base.

b) $\phi(e_{2n}) = \phi(X^{2n}) + \phi(X^{2n+1}) = e^{(q^{2n})}.e_{2n}$, $\phi(e_{2n+1}) = \phi(X^{2n}) - \phi(X^{2n+1}) = e^{(q^{2n+1})}.e_{2n+1}$.
Tous les e_n sont des vecteurs propres, associés à la valeur propre $e^{(q^n)}$, il en résulte que F_n est stable par ϕ.

c) La matrice de ϕ_n est diagonale, il en résulte que le déterminant de ϕ_n est le produit des valeurs propres, à savoir : $e.e^q...e^{(q^n)} = \exp(1 + q + ... + q^n) = \exp((1 - q^{n+1})/(1 - q))$

d) Par suite, comme $q \in]-1, 1[$, $\Delta_\phi = \lim_{n\to\infty} \det(\phi_n) = e^{1/(1-q)}$. (Il est donc possible de trouver des groupes du genre de G_1, d'automorphismes ϕ ayant un Δ_ϕ : $G_\sigma = \{\sigma\phi\sigma^{-1}$, où σ est un automorphisme quelconque fixé et $\phi \in G_1\}$, qui est un ensemble d'automorphismes liés à une base fixe dans laquelle leurs restrictions en dimensions finies sont trigonalisables).

7) Soit ϕ l'endomorphisme tel que pour tout entier naturel n : $\phi(X^{2n}) = X^{2n+2}$, $\phi(X^{2n+3}) = X^{2n+1}$, $\phi(X) = 1$.
a) Montrer que ϕ est bijective.
b) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme propre, même à coefficients complexes. (Il est donc impossible de trouver une base dans laquelle cet automorphisme serait de la forme souhaitée pour pouvoir calculer un objet du genre de Δ_ϕ).

- *Corrigé* : *a*) La base $(1, X, ..., X^n, ...)$ est transformée en elle-même de façon bi-univoque, c'est donc bien une bijection. (Attention, par exemple : ψ telle que : $\psi(1) = \psi(X) = 1$, et pour tout $n \geq 2$: $\psi(X^n) = X^{n-1}$, transforme aussi cette base en elle-même, mais pas de façon bi-univoque car 1 a deux antécédents possibles, ce n'est pas une bijection).
b) Soit $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, où $a_n \neq 0$; alors :

si n pair : $\phi(P) = a_1 + a_3X + a_0X^2 + a_5X^3 + a_2X^4 + ... + a_{n-1}X^{n-3} + a_{n-4}X^{n-2} + a_{n-2}X^n + a_nX^{n+2}$,

si n impair : $\phi(P) = a_1 + a_3X + a_0X^2 + a_5X^3 + a_2X^4 + ... + a_nX^{n-2} + a_{n-1}X^{n+1}$.

Comme $\phi(P)$ doit être de degré n, les coefficients de degrés supérieurs doivent être nuls. Il est donc impossible que n soit pair car il faudrait que $a_n = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc n est nécessairement impair. Mais c'est tout aussi impossible car $\phi(P)$ ne contient alors pas de terme de degré n.

Conclusion : Il n'y a pas de polynôme propre, même à coefficients complexes.

- *Remarque* : En considérant ϕ tel que $\phi(X^{2n}) = (n + 1)X^{2n}$, $\phi(X^{2n+1}) = X^{2n+1}/2(n + 1)$, et ψ tel que $\psi(X^{2n}) = 2X^{2n}/(n + 1)$, $\psi(X^{2n+1}) = (n + 1)X^{2n+1}$; alors ϕ est un élément de G_0 qui est l'inverse d'un élément de G_2, ψ est un élément de G_2 et la composée n'est pas dans $G_0\cup G_1\cup G_2$. On ne peut donc pas construire un sous-groupe de $G_0\cup G_1\cup G_2$ contenant G_2.