TSI2 / DM3-2008-2009.

E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$; F est l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique orthonormale $C = (n_1, n_2)$.

Soit $a, b, c, \alpha, \beta, \theta$ des réels donnés, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, $\beta \neq 0 \pmod{\pi}$, $\alpha + \beta \neq 0 \pmod{\pi}$.

On note : $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab.\cos(\alpha) & ac.\cos(\beta) \\ ab.\cos(\alpha) & b^2 & bc.\cos(\alpha+\beta) \\ ac.\cos(\beta) & bc.\cos(\alpha+\beta) & c^2 \end{pmatrix}$, et : $A = \begin{pmatrix} a.\cos(\theta) & b.\cos(\theta+\alpha) & c.\cos(\theta-\beta) \\ a.\sin(\theta) & b.\sin(\theta+\alpha) & c.\sin(\theta-\beta) \end{pmatrix}$.

Soit les complexes : $z_1 = a^2.\sin(\beta) + b^2\sin(\alpha+\beta).e^{i\alpha} = X_1 + iY_1$, et : $z_2 = a^2.\sin(\alpha) + c^2.\sin(\alpha+\beta).e^{-i\beta} = X_2 + iY_2$,

et les vecteurs de E : $u_1:\begin{pmatrix} a.\sin(\beta) \\ b.\sin(\alpha+\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$, et : $u_2:\begin{pmatrix} a.\sin(\alpha) \\ 0 \\ c.\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$, $u_3 = \dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}(u_1 \wedge u_2)$, ainsi que les vecteurs de F :

$w_1:\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, et : $w_2:\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On note enfin : $P = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, et $D = (u_1, u_2)$ la base de P.

1) *a*) Soit $u_0:\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; montrer que : $\det(M) = 0$, et : $|a + b.e^{i\alpha} + c.e^{-i\beta}|^2 = {}^t u_0 M u_0$.

b) Montrer que : $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E, et $C' = (w_1, w_2)$ une base de F.

2) Soit f l'endomorphisme de E de matrice M ; *a*) Montrer que u_3 est un vecteur directeur du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que : $f(u_1) = \dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}(\mathcal{Re}(z_1.e^{-i\alpha}).u_1 + \mathcal{Re}(z_1.e^{i\beta}).u_2)$ ($\mathcal{Re}$ désigne la partie réelle).

c) Exprimer de même $f(u_2)$ comme combinaison linéaire de u_1 et u_2. En déduire que : $\mathrm{Im}(f) = P$.

d) Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que : $f(u_1 + \mu.u_2) = \lambda.(u_1 + \mu.u_2)$; on ne demande pas de les calculer. (On pourra montrer que le discriminant de $\det(M - \lambda.I)/(-\lambda)$ est strictement positif).

3) On considère trois vecteurs de F, ainsi que la matrice V : $v_1:\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v_2:\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $v_3:\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'égalité $M = {}^t VV$ est réalisable si et seulement si, ces égalités étant données modulo π :

$\widehat{(v_1,v_2)} = -s.\alpha \pmod{\pi}$, $\widehat{(v_1,v_3)} = s.\beta \pmod{\pi}$, $\widehat{(v_2,v_3)} = s.(\alpha+\beta) \pmod{\pi}$, avec $s = \pm 1$.

b) En déduire les solutions V de : $M = {}^t VV$, puis de : $\{M = {}^t VV,\ V.u_3 = 0_F\}$.

4) Soit g l'application linéaire de matrice A dans B et C. Montrer que :

$g(u_1) = X_1.w_1 + Y_1.w_2$, et : $g(u_2) = X_2.w_1 + Y_2.w_2$. En déduire la matrice A' de g dans les bases B' et C'.

5) *a*) Soit h l'application linéaire de F dans E de matrice ${}^t A$ dans C et B ; montrer que $h \circ g = f$.

b) Montrer que : $h(w_1) = \dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}.(\cos(\alpha).u_1 + \cos(\beta).u_2)$, et : $h(w_2) = \dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}.(\sin(\alpha).u_1 - \sin(\beta).u_2)$.

c) Sa matrice dans C' et B' est-elle ${}^t A'$?

6) Soit l'application bilinéaire ϕ définie sur E, de matrice M dans B.

a) Montrer que $\phi(u_1, u_1) = |z_1|^2$, $\phi(u_2, u_2) = |z_2|^2$, $\phi(u_1, u_2) = \mathcal{Re}(z_1\overline{z_2})$. Donner la matrice de ϕ dans B'.

b) Montrer que la restriction de ϕ à P est un produit scalaire.

c) En déduire que la restriction de g à P conserve les normes de u_1 et u_2 si P est muni du produit scalaire ϕ tandis que F garde son produit scalaire canonique. Les normes des autres vecteurs de P sont-elles aussi conservées (pour ces mêmes produits scalaires) ?

d) Donner, exprimée dans D, une base orthonormale de P pour le produit scalaire ϕ (l'inverse de l'isométrie g est une isométrie, et une isométrie transforme toute base orthonormale en une base orthonormale).

e) Soit $D' = (u'_1, u'_2)$, avec $u'_1 = \dfrac{1}{X_2Y_1 - X_1Y_2}(X_1.u_1 + X_2.u_2)$, et $u'_2 = \dfrac{1}{X_2Y_1 - X_1Y_2}(Y_1.u_1 + Y_2.u_2)$. Donner la matrice de h dans C' et D'.