# TSI2 / DM3-2008-2009 / corrigé.

$E$ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$ ; $F$ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique orthonormale $C = (n_1, n_2)$.

Soit $a, b, c, \alpha, \beta, \theta$ des réels donnés, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, $\alpha \neq 0 \pmod \pi$, $\beta \neq 0 \pmod \pi$, $\alpha + \beta \neq 0 \pmod \pi$.

On note : $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab.\cos(\alpha) & ac.\cos(\beta) \\ ab.\cos(\alpha) & b^2 & bc.\cos(\alpha+\beta) \\ ac.\cos(\beta) & bc.\cos(\alpha+\beta) & c^2 \end{pmatrix}$, et : $A = \begin{pmatrix} a.\cos(\theta) & b.\cos(\theta+\alpha) & c.\cos(\theta-\beta) \\ a.\sin(\theta) & b.\sin(\theta+\alpha) & c.\sin(\theta-\beta) \end{pmatrix}$.

Soit les complexes : $z_1 = a^2.\sin(\beta) + b^2\sin(\alpha+\beta).e^{i\alpha} = X_1 + iY_1$, et : $z_2 = a^2.\sin(\alpha) + c^2.\sin(\alpha+\beta).e^{-i\beta} = X_2 + iY_2$,

et les vecteurs de $E$ : $u_1 : \begin{pmatrix} a.\sin(\beta) \\ b.\sin(\alpha+\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$, et : $u_2 : \begin{pmatrix} a.\sin(\alpha) \\ 0 \\ c.\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$, $u_3 = \dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}(u_1 \wedge u_2)$, ainsi que les vecteurs de $F$ :

$w_1 : \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, et : $w_2 : \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On note enfin : $P = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, et $D = (u_1, u_2)$ la base de $P$.

1) *a*) Soit $u_0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; montrer que : $\det(M) = 0$, et : $|a + b.e^{i\alpha} + c.e^{-i\beta}|^2 = {}^t u_0 M u_0$.

*b*) Montrer que : $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $E$, et $C' = (w_1, w_2)$ une base de $F$.

- *Corrigé* : *a*) Par calcul direct $\det(M) = a^2b^2c^2(1 + 2.\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha+\beta)) =$
$a^2b^2c^2(1 + 2.\cos(\alpha)\cos(\beta)(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta))^2) =$
$a^2b^2c^2(1 + 2.\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)\cos^2(\beta) - \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)) =$
$a^2b^2c^2(1 + \cos^2(\alpha)\cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - (1 - \cos^2(\alpha))(1 - \cos^2(\beta))) = 0$.

$|a + b.e^{i\alpha} + c.e^{-i\beta}|^2 = \ldots = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab.\cos(\alpha) + 2ac.\cos(\beta) + 2bc.\cos(\alpha+\beta)$. C'est la somme de tous les termes de la matrice $M$ ; pour $u_0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|a + b.e^{i\alpha} + c.e^{-i\beta}|^2 = {}^t u_0 M u_0$.

*b*) Du seul fait que $u_3$ n'est pas nul, $u_1$ et $u_2$ ne sont pas colinéaires, et $u_3$ leur est orthogonal ; $B'$ est donc une base de $E$. Quant à $C'$ : $\det(w_1, w_2) = 1$, c'est donc bien une base de $F$.

2) Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ de matrice $M$ ; *a*) Montrer que $u_3$ est un vecteur directeur du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

- *Corrigé* : Il faut résoudre $M.u = 0_E$, sachant que les trois équations obtenues sont linéairement dépendantes grâce à la question précédente. On les combine donc ainsi : $\cos(\alpha).L_1 - L_2$ et $\cos(\alpha).L_2 - L_1$, en simplifiant par $\sin(\alpha)$ : $\{b.\sin(\alpha)y = c.\sin(\beta)z,\ a.\sin(\alpha)x = -c.\sin(\alpha+\beta)z\}$. En posant $z = -ab.\sin(\alpha)$ : $u = u_3$.

*b*) Montrer que : $f(u_1) = \dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}(\mathcal{R}e(z_1.e^{-i\alpha}).u_1 + \mathcal{R}e(z_1.e^{i\beta}).u_2)$ ($\mathcal{R}e$ désigne la partie réelle).

- *Corrigé* : $M.\begin{pmatrix} a.\sin(\beta) \\ b.\sin(\alpha+\beta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3.\sin(\beta) + ab^2.\cos(\alpha)\sin(\alpha+\beta) \\ a^2b.\cos(\alpha)\sin(\beta) + b^3.\sin(\alpha+\beta) \\ a^2c.\sin(\beta)\cos(\beta) + b^2c.\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \ldots =$

$\dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}((a^2.\cos(\alpha)\sin(\beta) + b^2.\sin(\alpha+\beta)).u_1 + (a^2.\cos(\beta)\sin(\beta) + b^2.\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)).u_2) =$

$\dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}((X_1.\cos(\alpha) + Y_1.\sin(\alpha)).u_1 + (X_1.\cos(\beta) - Y_1.\sin(\beta)).u_2) = \dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}(\mathcal{R}e(z_1.e^{-i\alpha}).u_1 + \mathcal{R}e(z_1.e^{i\beta}).u_2)$.

c) Exprimer de même $f(u_2)$ comme combinaison linéaire de $u_1$ et $u_2$. En déduire que : $\mathrm{Im}(f) = P$.

- *Corrigé* : $M.\begin{pmatrix} a.\sin(\alpha) \\ 0 \\ c.\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3.\sin(\alpha) + ac^2.\cos(\beta)\sin(\alpha+\beta) \\ a^2b.\sin(\alpha)\cos(\alpha) + bc^2.\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \\ a^2c.\sin(\alpha)\cos(\beta) + c^3.\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \ldots =$

$\dfrac{1}{\sin(\alpha+\beta)}((a^2.\cos(\alpha)\sin(\alpha) + c^2.\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)).u_1 + (a^2.\cos(\beta)\sin(\alpha) + c^2.\sin(\alpha+\beta)).u_2) =$

$\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}((X_2.\cos(\alpha) + Y_2.\sin(\alpha)).u_1 + (X_2.\cos(\beta) - Y_2.\sin(\beta)).u_2) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}(\mathcal{Re}(z_2.e^{-i\alpha}).u_1 + \mathcal{Re}(z_2.e^{i\beta}).u_2)$.

Avec le théorème du rang, $rg(f) = 2$, et comme $f(P) = P$ est de dimension 2, il s'en suit que $Im(f) = P$.

*d*) Montrer qu'il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que : $f(u_1 + \mu.u_2) = \lambda.(u_1 + \mu.u_2)$ ; on ne demande pas de les calculer. (On pourra montrer que le discriminant de $\det(M - \lambda.I)/(-\lambda)$ est strictement positif).

- *Corrigé* : Si on tente $f(u_1 + \mu.u_2) - \lambda.(u_1 + \mu.u_2) = f(u_1) + \mu.f(u_2) - \lambda.u_1 - \lambda\mu.u_2$, en tirant $\lambda$ de $u_1$ et en le remplaçant dans $u_2$ on a une équation du second degré dont il suffit de prouver que le discriminant est positif, mais il est plus simple de raisonner sur le fait que $u_1 + \mu.u_2$ doit être un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ :

$\det(M - \lambda.I)/(-\lambda) = ... = \lambda^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda + a^2b^2.\sin^2(\alpha) + a^2c^2.\sin^2(\beta) + b^2c^2.\sin^2(\alpha + \beta)$ ; de discriminant :

$\Delta = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^2b^2.\sin^2(\alpha) + a^2c^2.\sin^2(\beta) + b^2c^2.\sin^2(\alpha + \beta)) = ... =$

$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2.\cos(2\alpha) + 2a^2c^2.\cos(2\beta) + 2b^2c^2.\cos(2\alpha + 2\beta) = |a^2 + b^2.e^{2i\alpha} + c^2.e^{-2i\beta}|^2$ d'après la première question, donc $\Delta > 0$.

On en déduit l'existence de deux réels distincts $\lambda_1$ et $\lambda_2$ non nuls (car le terme constant de l'équation du second degré est strictement positif) tels que $Ker(f - \lambda_1.id)$ et $Ker(f - \lambda_2.id)$ ne sont pas réduits au vecteur nul ; pour des raisons dues aux dimensions, ce sont des droites. Il existe donc deux vecteurs non nuls et linéairement indépendants $i_1$ et $i_2$ tels que $f(i_1) = \lambda_1.i_1$ et $f(i_2) = \lambda_2.i_2$ ; on a donc $f(Vect(i_1, i_2)) = Vect(i_1, i_2)$, et pour des raisons dues aux dimensions : $Vect(i_1, i_2) = P$,d'où l'on déduit que $i_1$ et $i_2$ sont combinaisons linéaires de $u_1$ et $u_2$. On peut aussi décider arbitrairement que la composante de $i_1$, ou $i_2$, en $u_1$ vaut 1 ; le seul cas où c'est impossible c'est lorsque l'un de ces deux vecteurs vaut $u_2$, mais dans ce cas l'autre en est distinct et il existe donc toujours un réel $\mu$ tel que $u_1 + \mu.u_2$ soit un vecteur propre.

3) On considère trois vecteurs de F, ainsi que la matrice V : $v_1:\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v_2:\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $v_3:\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$.

*a*) Montrer que l'égalité $M = {}^tVV$ est réalisable si et seulement si, ces égalités étant données modulo $\pi$ :

$(\widehat{v_1,v_2}) = -s.\alpha \pmod{\pi}$, $(\widehat{v_1,v_3}) = s.\beta \pmod{\pi}$, $(\widehat{v_2,v_3}) = s.(\alpha + \beta) \pmod{\pi}$, avec $s = \pm1$.

- *Corrigé* : On calcule ${}^tVV = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 & x_1x_3 + y_1y_3 \\ x_1x_2 + y_1y_2 & x_2^2 + y_2^2 & x_2x_3 + y_2y_3 \\ x_1x_3 + y_1y_3 & x_2x_3 + y_2y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$. D'où l'on déduit :

$||v_1|| = |a|$, $||v_2|| = |b|$, $||v_3|| = |c|$, $(v_1|v_2) = ab.\cos(\alpha)$, $(v_1|v_3) = ac.\cos(\beta)$, $(v_2|v_3) = bc.\cos(\alpha + \beta)$. On en déduit immédiatement le résultat (avec la relation de Chasles sur les angles).

*b*) En déduire les solutions V de : $M = {}^tVV$, puis de : $\{M = {}^tVV,\ V.u_3 = 0_F\}$.

- *Corrigé* : En tenant compte des conditions précédentes, $V = \begin{pmatrix} a.\cos(t) & b.\cos(t - s.\alpha + \varepsilon.\pi) & c.\cos(t + s.\beta + \varepsilon'.\pi) \\ a.\sin(t) & b.\sin(t - s.\alpha + \varepsilon.\pi) & c.\sin(t + s.\beta + \varepsilon'.\pi) \end{pmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$, $s = \pm1$, $\varepsilon = 0$ ou 1, $\varepsilon' = 0$ ou 1.

Dans le second cas : On calcule $A.u_1 = 0_F \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon' = 0$, donc $V = \begin{pmatrix} a.\cos(t) & b.\cos(t - s.\alpha) & c.\cos(t + s.\beta) \\ a.\sin(t) & b.\sin(t - s.\alpha) & c.\sin(t + s.\beta) \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$ et $s = \pm1$.

- *Remarque* : En notant $Z = (a.e^{i\theta}\ \ b.e^{i(\theta+\alpha)}\ \ c.e^{i(\theta-\beta)})$, alors : $M = \mathcal{Re}({}^t\overline{Z}Z)$, et $A = \begin{pmatrix} \mathcal{Re}(Z) \\ \mathcal{Im}(Z) \end{pmatrix}$.

4) Soit g l'application linéaire de matrice A dans B et C. Montrer que :

$g(u_1) = X_1.w_1 + Y_1.w_2$, et : $g(u_2) = X_2.w_1 + Y_2.w_2$. En déduire la matrice A' de g dans les bases B' et C'.

- *Corrigé* : $g(u_1) = A.\begin{pmatrix} a.\sin(\beta) \\ b.\sin(\alpha + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} = a^2.\sin(\beta).\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + b^2.\sin(\alpha + \beta).\begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} = ... = X_1.w_1 + Y_1.w_2$.

$g(u_2) = A.\begin{pmatrix} a.\sin(\alpha) \\ 0 \\ c.\sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = a^2.\sin(\alpha).\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + c^2.\sin(\alpha + \beta).\begin{pmatrix} \cos(\theta - \beta) \\ \sin(\theta - \beta) \end{pmatrix} = ... = X_2.w_1 + Y_2.w_2$.

Les colonnes de A' sont les coordonnées de $g(u_1)$, $g(u_2)$, $g(u_3)$ données en fonction de $w_1$ et $w_2$, donc :

$A' = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ Y_1 & Y_2 & 0 \end{pmatrix}$.

5) *a*) Soit h l'application linéaire de F dans E de matrice ${}^tA$ dans C et B ; montrer que $h \circ g = f$.

- *Corrigé* : Soit u, v et w des vecteurs quelconques tels que $g(u) = v$ et $h(v) = w$, on a donc :

$v_C = A.u_B$ et $w_B = {}^tA.v_C = {}^tAA.u_B = M.u_B$ donc $w = f(u)$, et ainsi : $f = h \circ g$.

*b*) Montrer que : $h(w_1) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}.(\cos(\alpha).u_1 + \cos(\beta).u_2)$, et : $h(w_2) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}.(\sin(\alpha).u_1 - \sin(\beta).u_2)$.

- *Corrigé* : D'après la question 2) : $f(u_1) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}((X_1.\cos(\alpha) + Y_1.\sin(\alpha)).u_1 + (X_1.\cos(\beta) - Y_1.\sin(\beta)).u_2) =$

$\frac{X_1}{\sin(\alpha+\beta)}(\cos(\alpha).u_1 + \cos(\beta).u_2) + \frac{Y_1}{\sin(\alpha+\beta)}(\sin(\alpha).u_1 - \sin(\beta).u_2) = h(g(u_1)) = X_1.h(w_1) + Y_1.h(w_2)$, et :

$f(u_2) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}((X_2.\cos(\alpha) + Y_2.\sin(\alpha)).u_1 + (X_2.\cos(\beta) - Y_2.\sin(\beta)).u_2) =$

$\frac{X_2}{\sin(\alpha+\beta)}(\cos(\alpha).u_1 + \cos(\beta).u_2) + \frac{Y_2}{\sin(\alpha+\beta)}(\sin(\alpha).u_1 - \sin(\beta).u_2) = X_2.h(w_1) + Y_2.h(w_2)$, en inversant le système

on a bien : $h(w_1) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}.(\cos(\alpha).u_1 + \cos(\beta).u_2)$, et : $h(w_2) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}.(\sin(\alpha).u_1 - \sin(\beta).u_2)$.

*c*) Sa matrice dans C' et B' est-elle ${}^tA'$ ?

- *Corrigé* : Soit P la matrice des vecteurs de B' donnés dans B, et Q la matrice des vecteurs de C' donnés dans C. Alors : $A' = Q^{-1}AP$, et ${}^tA' = {}^t(Q^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tQ^{-1}$ ; cependant, la formule de changement de base de ${}^tA$ dans C' et B' est : $A'' = P^{-1}\,{}^tAQ$, ce qui à priori n'est pas la même chose, mais il est plus simple d'écrire A'' en utilisant le résultat précédent :

$A'' = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}.\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et : ${}^tA' = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il y a donc un système de quatre équations à résoudre, dont les solutions sont, après calculs : $a = 0$, $b = \pm 1/\sin(\alpha+\beta)$, $c = \pm 1/\sin(\alpha+\beta)$ ; et, comme $a \neq 0$, donc : $A'' \neq {}^tA'$.

6) Soit l'application bilinéaire $\phi$ définie sur E, de matrice M dans B.

*a*) Montrer que $\phi(u_1, u_1) = |z_1|^2$, $\phi(u_2, u_2) = |z_2|^2$, $\phi(u_1, u_2) = \mathscr{Re}(z_1\overline{z_2})$. Donner la matrice de $\phi$ dans B'.

- *Corrigé* :

$\phi(u_1, u_1) = (a.\sin(\beta) \;\; b.\sin(\alpha+\beta) \;\; 0).M.\begin{pmatrix} a.\sin(\beta) \\ b.\sin(\alpha+\beta) \\ 0 \end{pmatrix} = (a.\sin(\beta) \;\; b.\sin(\alpha+\beta) \;\; 0).\begin{pmatrix} a^3.\sin(\beta) + ab^2.\cos(\alpha)\sin(\alpha+\beta) \\ a^2b.\cos(\alpha)\sin(\beta) + b^3.\sin(\alpha+\beta) \\ a^2c.\sin(\beta)\cos(\beta) + b^2c.\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$

$a^4.\sin^2(\beta) + 2a^2b^2.\sin(\beta)\cos(\alpha)\sin(\alpha+\beta) + b^4.\sin^2(\alpha+\beta) = |z_1|^2$.

$\phi(u_2, u_2) = (a.\sin(\alpha) \;\; 0 \;\; c.\sin(\alpha+\beta)).M.\begin{pmatrix} a.\sin(\alpha) \\ 0 \\ c.\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = (a.\sin(\alpha) \;\; 0 \;\; c.\sin(\alpha+\beta)).\begin{pmatrix} a^3.\sin(\alpha) + ac^2.\cos(\beta)\sin(\alpha+\beta) \\ a^2b.\sin(\alpha)\cos(\alpha) + bc^2.\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \\ a^2c.\sin(\alpha)\cos(\beta) + c^3.\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$

$a^4.\sin^2(\alpha) + 2a^2c^2.\sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\alpha+\beta) + c^4.\sin^2(\alpha+\beta) = |z_2|^2$.

$\phi(u_1, u_2) = (a.\sin(\alpha) \;\; 0 \;\; c.\sin(\alpha+\beta)).M.\begin{pmatrix} a.\sin(\beta) \\ b.\sin(\alpha+\beta) \\ 0 \end{pmatrix} = (a.\sin(\alpha) \;\; 0 \;\; c.\sin(\alpha+\beta)).\begin{pmatrix} a^3.\sin(\beta) + ab^2.\cos(\alpha)\sin(\alpha+\beta) \\ a^2b.\cos(\alpha)\sin(\beta) + b^3.\sin(\alpha+\beta) \\ a^2c.\sin(\beta)\cos(\beta) + b^2c.\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$

$a^4.\sin(\alpha)\sin(\beta) + a^2b^2.\sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\alpha+\beta) + a^2c^2.\sin(\beta)\cos(\beta)\sin(\alpha+\beta) + b^2c^2.\cos(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha+\beta) =$

$(a^2.\sin(\beta) + b^2.\cos(\alpha)\sin(\alpha+\beta))(a^2.\sin(\alpha) + c^2.\cos(\beta)\sin(\alpha+\beta)) - b^2c^2.\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\alpha+\beta) = \mathscr{Re}(z_1\overline{z_2})$.

Comme $u_3$ annule $\phi$ et que les coefficients de la matrice sont les $\phi(u_i, u_j)$ (matrice de Gram), alors :

$M' = \begin{pmatrix} |z_1|^2 & \mathscr{Re}(z_1\overline{z_2}) & 0 \\ \mathscr{Re}(z_1\overline{z_2}) & |z_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^2 + Y_1^2 & X_1X_2 + Y_1Y_2 & 0 \\ X_1X_2 + Y_1Y_2 & X_2^2 + Y_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*b*) Montrer que la restriction de $\phi$ à P est un produit scalaire.

- *Corrigé* : Cette forme bilinéaire est symétrique car sa matrice l'est. Soit $u : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base D ; alors :

$\phi(u, u) = |z_1|^2x^2 + 2\mathscr{Re}(z_1\overline{z_2}).xy + |z_2|^2y^2 = (xz_1 + yz_2)(x\overline{z_1} + y\overline{z_2}) = |xz_1 + yz_2|^2$.

$\phi$ est donc positive, et définie car : $\phi(u, u) = 0 \Leftrightarrow xz_1 + yz_2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $z_1/z_2 \in \mathbb{R}$ ; or, comme $z_2 \neq 0$ :

$z_1/z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{Im}(z_1\overline{z}_2) = 0 \Leftrightarrow X_2Y_1 - X_1Y_2 = 0 \Leftrightarrow$

$\sin(\alpha + \beta)(a^2b^2.\sin^2(\alpha) + a^2c^2.\sin^2(\beta) + b^2c^2.\sin^2(\alpha + \beta)) = 0$, ce qui est exclu. Donc : $x = y = 0$.

On note désormais : $\Delta = X_2Y_1 - X_1Y_2 = \sin(\alpha + \beta)(a^2b^2.\sin^2(\alpha) + a^2c^2.\sin^2(\beta) + b^2c^2.\sin^2(\alpha + \beta))$.

*c*) En déduire que la restriction de $g$ à $P$ conserve les normes de $u_1$ et $u_2$ si $P$ est muni du produit scalaire $\phi$ tandis que $F$ garde son produit scalaire canonique. Les normes des autres vecteurs de $P$ sont-elles aussi conservées (pour ces mêmes produits scalaires) ?

- *Corrigé* : $||u_1||_\phi = |z_1| = ||g(u_1)||$ et $||u_2||_\phi = |z_2| = ||g(u_2)||$, ce qui répond à la question.

Dans le cas général : $||x.u_1 + y.u_2||_\phi = |xz_1 + yz_2|$, tandis que : $||g(x.u_1 + y.u_2)|| = ||x.g(u_1) + y.g(u_2)|| =$

$||(xX_1 + yX_2).w_1 + (xY_1 + yY_2).w_2|| = \sqrt{(X_1^2 + Y_1^2)x^2 + 2(X_1X_2 + Y_1Y_2)xy + (X_2^2 + Y_2^2)y^2} = |xz_1 + yz_2|$.

On a donc bien, pour tout vecteur $u$ de $P$ : $||g(u)|| = ||u||_\phi$ ; $g$ est une isométrie de $(P, \phi)$ dans $F$.

*d*) Donner, exprimée dans $D$, une base orthonormale de $P$ pour le produit scalaire $\phi$ (l'inverse de l'isométrie $g$ est une isométrie, et une isométrie transforme toute base orthonormale en une base orthonormale).

- *Corrigé* : L'inverse de $g$ est une isométrie ; la base orthonormale cherchée est donc : $(g^{-1}(w_1), g^{-1}(w_2)) = (\frac{1}{X_2Y_1 - X_1Y_2}(-Y_2.u_1 + Y_1.u_2), \frac{1}{X_2Y_1 - X_1Y_2}(X_2.u_1 - X_1.u_2))$ (en inversant la restriction de $A' = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ Y_1 & Y_2 & 0 \end{pmatrix}$ à $P$)

*e*) Soit $D' = (u'_1, u'_2)$, avec $u'_1 = \frac{1}{X_2Y_1 - X_1Y_2}(-Y_2.u_1 + Y_1.u_2)$, et $u'_2 = \frac{1}{X_2Y_1 - X_1Y_2}(X_2.u_1 - X_1.u_2)$. Donner la matrice de $h$ dans $C'$ et $D'$.

- *Corrigé* : Il s'agit d'exprimer $h(w_1)$ et $h(w_2)$ dans $D'$. La matrice de $D'$ donnée dans $D$ étant $N^{-1}$, pour $N = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$, alors : $h(w_1)_{D'} = N.h(w_1)_D$ et $h(w_2)_{D'} = N.h(w_2)_D$. Ainsi :

$$h(w_1)_{D'} = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)}.\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix} = (a^2 + b^2.\cos^2(\alpha) + c^2.\cos^2(\beta)).u'_1 + (b^2.\sin(\alpha)\cos(\alpha) - c^2.\sin(\beta)\cos(\beta)).u'_2,$$

$$h(w_2)_{D'} = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)}.\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\sin(\beta) \end{pmatrix} = (b^2.\sin(\alpha)\cos(\alpha) - c^2.\sin(\beta)\cos(\beta)).u'_1 + (b^2.\sin^2(\alpha) + c^2.\sin^2(\beta)).u'_2.$$

La matrice cherchée est donc : $\begin{pmatrix} a^2 + b^2.\cos^2(\alpha) + c^2.\cos^2(\beta) & b^2.\sin(\alpha)\cos(\alpha) - c^2.\sin(\beta)\cos(\beta) \\ b^2.\sin(\alpha)\cos(\alpha) - c^2.\sin(\beta)\cos(\beta) & b^2.\sin^2(\alpha) + c^2.\sin^2(\beta) \end{pmatrix}$.