

TSI2 / DM3-2009-2010.

Un exemple de formule de Taylor pour les polynômes d'une matrice triangulaire particulière.

I) Propriétés utiles pour les parties suivantes.

1) Une propriété des coefficients binomiaux :

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Il faut prouver que chaque terme d'une ligne donnée est égal à la somme des coefficients de la colonne qui se situe au-dessus et à sa gauche :

Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels (n, q) , où $2 \leq q \leq n$: $\binom{n}{q} = \sum_{p=q-1}^{n-1} \binom{p}{q-1}$.

- *Corrigé* : Par récurrence sur n ; initialisation pour $n = q$: $\binom{q}{q} = \sum_{p=q-1}^{q-1} \binom{p}{q-1}$. est évident.

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n ; on a, au rang $n + 1$:

$$\binom{n+1}{q} = \binom{n}{q} + \binom{n}{q-1} = \sum_{p=q-1}^{n-1} \binom{p}{q-1} + \binom{n}{q-1} = \sum_{p=q-1}^{n-1} \binom{p}{q-1}.$$

La propriété est donc vraie.

2) *Commutation de sigmas.*

a) Étant donné les entiers naturels $r \geq 2$ et $k \geq 2$, et la suite $(x_{q,m})_{(q,m) \in \mathbb{N}^2}$, montrer que :

$$\sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} \sum_{m=q}^r x_{q,m} = \sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} x_{q,m}.$$

b) Étant donné les entiers naturels $m \geq 2$ et $k \geq 2$, et la suite $(x_q)_{q \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1} \cdot x_q = \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{q=1}^{\min(m, k-p)} \binom{k-p-1}{q-1} \cdot x_q.$$

- *Corrigé* : a) $\sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} \sum_{m=q}^r x_{q,m} = \sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} (x_{q,q} + x_{q,q+1} + \dots + x_{q,r-1} + x_{q,r}) =$

$$(x_{1,1} + x_{1,2} + \dots + x_{1,r-1} + x_{1,r}) + (x_{2,2} + x_{2,3} + \dots + x_{2,r-1} + x_{2,r}) + \dots + (x_{\min(r, k-1), \min(r, k-1)} + x_{\min(r, k-1), \min(r, k-1)+1} + \dots + x_{\min(r, k-1), r-1} + x_{\min(r, k-1), r}).$$

On réunit les termes autrement : $\sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} \sum_{m=q}^r x_{q,m} =$

$$(x_{1,1}) + (x_{1,2} + x_{2,2}) + \dots + (x_{1,r-1} + x_{2,r-1} + \dots + x_{\min(r, k-1), r-1}) + (x_{1,r} + x_{2,r} + \dots + x_{\min(r, k-1), r}) =$$

$$\left(\sum_{q=1}^{\min(1, k-1)} x_{q,1} \right) + \left(\sum_{q=1}^{\min(2, k-1)} x_{q,2} \right) + \dots + \left(\sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} x_{q,r} \right) = \sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} x_{q,m}.$$

b) $\sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1} \cdot x_q = \sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \left(\binom{q-1}{q-1} + \binom{q}{q-1} + \dots + \binom{k-4}{q-1} + \binom{k-3}{q-1} \right) \cdot x_q =$

$$\left(\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \dots + \binom{k-4}{0} + \binom{k-3}{0} \right) \cdot x_1 + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{k-4}{1} + \binom{k-3}{1} \right) \cdot x_2 + \dots +$$

$$\left(\binom{\min(m, k-2)-1}{\min(m, k-2)-1} + \binom{\min(m, k-2)}{\min(m, k-2)-1} + \dots + \binom{k-4}{\min(m, k-2)-1} + \binom{k-3}{\min(m, k-2)-1} \right) \cdot X_{\min(m, k-2)}.$$

En remarquant que la dernière ligne ne contient que le seul terme $\binom{k-3}{k-3} \cdot X_{k-2}$ si $\min(m, k-2) = k-2$.

On réunit les termes autrement : $\sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1} \cdot X_q =$

$$\begin{aligned} & \left(\binom{k-3}{0} \cdot X_1 + \binom{k-3}{1} \cdot X_2 + \dots + \binom{k-3}{\min(m, k-2)-1} \cdot X_{\min(m, k-2)} \right) + \\ & \left(\binom{k-4}{0} \cdot X_1 + \binom{k-4}{1} \cdot X_2 + \dots + \binom{k-4}{\min(m, k-2)-1} \cdot X_{\min(m, k-2)} \right) + \\ & \left(\binom{k-5}{0} \cdot X_1 + \binom{k-5}{1} \cdot X_2 + \dots + \binom{k-4}{\min(m, k-5)-1} \cdot X_{\min(m, k-2)} \right) + \dots + \binom{0}{0} \cdot X_1. \end{aligned}$$

Et comme la deuxième ligne doit être inférieure à la première dans les combinaisons : $\sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1} \cdot X_q =$

$$\begin{aligned} & \left(\binom{k-3}{0} \cdot X_1 + \binom{k-3}{1} \cdot X_2 + \dots + \binom{k-3}{\min(m, k-2)-1} \cdot X_{\min(m, k-2)} \right) + \\ & \left(\binom{k-4}{0} \cdot X_1 + \binom{k-4}{1} \cdot X_2 + \dots + \binom{k-4}{\min(m, k-3)-1} \cdot X_{\min(m, k-3)} \right) + \\ & \left(\binom{k-5}{0} \cdot X_1 + \binom{k-5}{1} \cdot X_2 + \dots + \binom{k-5}{\min(m, k-4)-1} \cdot X_{\min(m, k-4)} \right) + \dots + \binom{0}{0} \cdot X_1 = \end{aligned}$$

$$\sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \binom{k-2-1}{q-1} \cdot X_q + \sum_{q=1}^{\min(m, k-3)} \binom{k-3-1}{q-1} \cdot X_q + \sum_{q=1}^{\min(m, k-4)} \binom{k-4-1}{q-1} \cdot X_q + \dots + \sum_{q=1}^{\min(m, k-(k-1))} \binom{k-(k-1)-1}{q-1} \cdot X_q.$$

Enfinement : $\sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1} \cdot X_q = \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{q=1}^{\min(m, k-p)} \binom{k-p-1}{q-1} \cdot X_q.$

3) Montrer que : $m \cdot \binom{m-1}{q} = (m-q) \cdot \binom{m}{q}.$

- Corrigé : $m \cdot \binom{m-1}{q} = \frac{m \cdot (m-1)!}{q!(m-1-q)!} = \frac{m!}{q!(m-1-q)!} = \frac{(m-q)m!}{q!(m-q)!} = (m-q) \cdot \binom{m}{q}.$

II) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, et la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}.$

Pour tout entier relatif $k \in \llbracket 1 - n, n \rrbracket$, d_k désigne la k -ième diagonale d'une matrice donnée, où l'on numérote 1 la diagonale principale.

Ici : $d_k(A_x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ($n+k$ lignes) pour $k \in \llbracket 1 - n, 0 \rrbracket$, $d_1(A_x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$ (n lignes), et $d_k(A_x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ($n-k+1$ lignes)

pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

On admet la formule démontrée au DS2 :

Pour $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$, et $\phi_{p,q}(M, N) = (a_{k,p+k-1} b_{p+k-1, p+q+k-2})_{1 \leq k \leq n-p-q+2}$, alors :

$$d_k(MN) = \sum_{p=1}^k \phi_{p, k+1-p}(M, N).$$

En remarquant que $\phi_{p,q}(M, N)$ peut être présenté comme le produit scalaire du début de $d_p(M)$ avec la fin de $d_q(N)$:

$$\phi_{p,q}(M, N) = \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p+1} \\ \vdots \\ a_{n-p,q+1,n-q} \\ a_{n-p,q+2,n-q+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{p,p+q-1} \\ b_{p+1,p+q} \\ \vdots \\ b_{n-q,n-1} \\ b_{n-q+1,n} \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A_x^2 et A_x^3 .

- *Corrigé* :

$$A_x^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 2x & \dots & 2x+n-3 & 2x+n-2 \\ 0 & x^2 & \ddots & \ddots & 2x+n-3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & x^2 & 2x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x^2 \end{pmatrix}; A_x^3 = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & \dots & 3x^2+(3n-9)x+(n-3)(n-4)/2 & 3x^2+(3n-6)x+(n-2)(n-3)/2 \\ 0 & x^3 & \ddots & \ddots & 3x^2+(3n-9)x+(n-3)(n-4)/2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & x^3 & 3x^2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x^3 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $d_1(A_x^m) = x^m \cdot d_1(I)$, et : $d_2(A_x^m) = m \cdot x^{m-1} \cdot d_2(A_0)$.

- *Corrigé* : On utilise la formule du DS2, avec une récurrence.

Initialisation : $d_1(A_x^0) = x^0 \cdot d_1(I)$ et $d_1(A_x) = x \cdot d_1(I)$.

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang m , et on a au rang $m+1$: $d_1(AA_x^m) = \phi_{1,1}(A, A_x^m) = \dots = x^{m+1} \cdot d_1(I)$.

Même chose avec l'autre propriété ; initialisation : $d_2(A_x^0) = 0 \cdot d_2(I)$ et $d_2(A_x) = 1 \cdot d_2(A_0)$.

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang m , et on a au rang $m+1$:

$$d_2(AA_x^m) = \sum_{p=1}^2 \phi_{p,3-p}(A, A_x^m) = \phi_{1,2}(A, A_x^m) + \phi_{2,1}(A, A_x^m) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} mx^{m-1} \\ mx^{m-1} \\ \vdots \\ mx^{m-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^m \\ x^m \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m+1)x^m \\ (m+1)x^m \\ \vdots \\ (m+1)x^m \end{pmatrix} =$$

$d_2(AA_x^m) = (m+1)x^m \cdot d_2(A_0)$, ce qui prouve la proposition.

3) On suppose que, pour $k \geq 2$: $d_k(A_x^m) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot x^{m-q} \cdot d_k(A_0)$.

Pour $k \geq 2$, cette formule implique que les polynômes formant les composantes de $d_k(A_x^m)$ sont tous de degré $m-1$ (obtenu pour $q=1$) ; la borne supérieure du sigma, $\min(m, k-1)$, signifie qu'ils comportent $k-1$ monômes tant qu'on n'a pas atteint la limite maximale de m termes, car il ne peut pas y en avoir plus dans un polynôme de degré $m-1$ (le degré de x , $m-q$, ne peut pas devenir négatif).

a) Pour $n=6$, mettre en évidence dans A_x^2 et A_x^3 les diagonales pour lesquelles $\min(m, k-1)$ vaut m ou $k-1$.

b) Montrer en écrivant directement la formule de $d_k(A_x^{m+1})$, et en utilisant l'hypothèse (H), que l'on obtient l'égalité (E_1) :

$$(E_1) : d_k(A_x^{m+1}) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)-1} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q} \cdot x^{m-q} + x^m \right) \cdot d_k(A_0).$$

(Utiliser la formule de récurrence usuelle des coefficients binomiaux).

c) Montrer que si $m+1 \leq k-1$, alors le terme correspondant à $q=m+1$ dans $\sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot x^{m+1-q}$ est nul. En déduire que l'égalité (E_1) vaut en fait :

$$(E_1) : d_k(A_x^{m+1}) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)-1} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q} \cdot x^{m-q} + x^m \right) \cdot d_k(A_0).$$

d) Montrer, en utilisant l'expression de $d_k(MN)$ comme somme des $\phi_{p, k+1-p}(M, N)$, ainsi que l'hypothèse (H), qu'on obtient l'égalité (E_2) :

$$(E_2) : d_k(A_x^{m+1}) = d_k(A_x \cdot A_x^m) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1} \binom{m}{q} \cdot x^{m-q} + x^m \right) \cdot d_k(A_0).$$

e) En déduire que :

$$(E_2) : d_k(A_x^{m+1}) = d_k(A_x \cdot A_x^m) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1} \binom{m}{q} \cdot x^{m-q} + x^m \right) \cdot d_k(A_0).$$

f) En déduire que : (E_1) = (E_2).

g) Montrer par récurrence sur $m \in \mathbf{N}^*$ que, pour $k \geq 2$: $d_k(A_x^m) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m-q} d_k(A_0)$.

- *Corrigé* : a) Les diagonales pour lesquelles $k-1 < m$ sont en écriture ordinaire ; celle pour laquelle $k-1 = m$ est en caractères **gras**, et celles pour lesquelles $k-1 > m$ sont en *italiques* (à droite des précédentes) :

$$A_x^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 2x & \mathbf{2x+1} & 2x+2 & 2x+3 & 2x+4 \\ 0 & x^2 & 2x & \mathbf{2x+1} & 2x+2 & 2x+3 \\ 0 & 0 & x^2 & 2x & \mathbf{2x+1} & 2x+2 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 & 2x & \mathbf{2x+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & 2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}; A_x^3 = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x^2+3x & \mathbf{3x^2+6x+1} & 3x^2+9x+3 & 3x^2+12x+6 \\ 0 & x^3 & 3x^2 & 3x^2+3x & \mathbf{3x^2+6x+1} & 3x^2+9x+3 \\ 0 & 0 & x^3 & 3x^2 & 3x^2+3x & \mathbf{3x^2+6x+1} \\ 0 & 0 & 0 & x^3 & 3x^2 & 3x^2+3x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}.$$

$$b) d_k(A_x^{m+1}) = \sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)} \binom{m+1}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} d_k(A_0) = \sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} d_k(A_0) + \sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)} \binom{m}{q-1} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} d_k(A_0), \text{ car : } \binom{m+1}{q} = \binom{m}{q} + \binom{m}{q-1}.$$

$$\text{Ainsi : } d_k(A_x^{m+1}) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} + \sum_{q=2}^{\min(m+1, k-1)} \binom{m}{q-1} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} + x^m \right) d_k(A_0) =$$

$$(E_1) : d_k(A_x^{m+1}) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)-1} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q} x^{m-q} + x^m \right) d_k(A_0).$$

c) Si $m+1 \leq k-1$, alors le terme correspondant à $q = m+1$ dans la première somme vaut : $\binom{m}{m+1} \binom{k-2}{m}$; il est donc nul car la première ligne de la première combinaison est strictement inférieure à la deuxième ligne. Il en résulte qu'on peut le supprimer et qu'il n'y a plus de différence entre $\min(m+1, k-1)$ et $\min(m, k-1)$:

$$(E_1) : d_k(A_x^{m+1}) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m+1, k-1)-1} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q} x^{m-q} + x^m \right) d_k(A_0).$$

d) En notant $a_{i,j}$ les coefficients de A_x^m :

$$d_k(A_x^{m+1}) = d_k(A_x \cdot A_x^m) = \sum_{p=1}^k \phi_{p, k+1-p}(A_x, A_x^m) = \phi_{1, k}(A_x, A_x^m) + \sum_{p=2}^{k-1} \phi_{p, k+1-p}(A_x, A_x^m) + \phi_{k, 1}(A_x, A_x^m) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1, k} \\ a_{2, k+1} \\ \vdots \\ a_{n-k, n-1} \\ a_{n-k+1, n} \end{pmatrix} + \sum_{p=2}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{p, k} \\ a_{p+1, k+1} \\ \vdots \\ a_{n+p-k-1, n-1} \\ a_{n+p-k, n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^m \\ x^m \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

On applique ensuite l'hypothèse de départ :

$$(E_2) : d_k(A_x^{m+1}) = \left(x \cdot \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m-q} + \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{q=1}^{\min(m, k-p)} \binom{m}{q} \binom{k-p-1}{q-1} x^{m-q} + x^m \right) d_k(A_0).$$

e) On utilise l'égalité montrée au I.2.b), avec $x_q = \binom{m}{q} x^{m-q}$, et on obtient directement le résultat :

$$(E_2) : d_k(A_x^{m+1}) = d_k(A_x \cdot A_x^m) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1} \binom{m}{q} x^{m-q} + x^m \right) d_k(A_0).$$

f) Comme on l'a démontré au I.1) : $\binom{k-2}{q} = \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1}$, donc :

$$(E_2) : d_k(A_x^{m+1}) = d_k(A_x \cdot A_x^m) = \left(\sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m, k-2)} \binom{k-2}{q} \binom{m}{q} x^{m-q} + x^m \right) d_k(A_0).$$

On reconnaît (E_1) car $\min(m+1, k-1) - 1 = \min(m, k-2)$.

g) On fait une démonstration par récurrence :

Initialisation : Pour $m = 1$ et $k \geq 2$, $d_k(A_x) = d_k(A_0)$, ce qui est vrai car les deux matrices ne diffèrent que sur la première diagonale.

On suppose la propriété vraie jusqu'à m ; alors, au rang $m+1$ l'égalité entre les formules (E_1) et (E_2) prouve la propriété au rang $m+1$; moyennant quoi l'hypothèse initiale est définitivement vraie.

III) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M|N) = \text{tr}(MN)$, qui lui confère une structure euclidienne analogue à celle de \mathbb{R}^{n^2} .

1) La matrice U étant donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la translation $t_U : t_U(M) = M + U$. Montrer qu'elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *Corrigé* : On doit montrer qu'elle est continue en tout $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|M - M_0\| < \eta \Rightarrow \|t_U(M) - t_U(M_0)\| < \varepsilon.$$

Comme $\|t_U(M) - t_U(M_0)\| = \|M - M_0\|$, la condition est réalisée pour $\eta = \varepsilon$.

2) Préciser pourquoi $\text{Vect}(I)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit, J étant une partie de $\mathbb{R} : V_J = \{A_x, x \in J\}$. Montrer que $V_{\mathbb{R}}$ est un fermé non borné, et que $V_{[0,1]}$ est un fermé borné.

- *Corrigé* : $\text{Vect}(I)$ est un fermé car tout sous-espace vectoriel est un fermé.

$V_{\mathbb{R}} = t_U(\text{Vect}(I))$ pour $U = A_0$; il en résulte que c'est bien un fermé. Par ailleurs : $\|A_x\| = \sqrt{nx^2 + n(n-1)/2}$ n'est pas bornée quand x décrit \mathbb{R} , ce dont on déduit que $V_{\mathbb{R}}$ n'est pas borné.

On sait déjà que tout élément qui n'est pas dans $V_{\mathbb{R}}$ est le centre d'une boule dont l'intersection avec $V_{\mathbb{R}}$ est vide ; il en sera donc de même de son intersection avec $V_{[0,1]} \subset V_{\mathbb{R}}$.

Il reste à démontrer la même propriété pour un élément A_x quelconque de $V_{\mathbb{R}} \setminus V_{[0,1]}$; il y a deux cas :

Si $x < 0$, alors $B(A_x, -x/2)$ convient ; tandis que si $x > 1$, alors $B(A_x, (x-1)/2)$ convient. Mais il faut le prouver :

Soit $x < 0$ et $M \in B(A_x, -x/2)$; on suppose que $M \in V_{[0,1]}$, alors : $\exists y \in [0, 1], M = y.I + A_0$. Par suite :

$M - A_x = (y-x).I$, donc : $\|M - A_x\| = |y-x|.\sqrt{n} < \frac{x}{2}$, d'où : $\frac{x}{2\sqrt{n}} < y-x < \frac{-x}{2\sqrt{n}}$, c'est-à-dire :

$$(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}})x < y < (1 - \frac{1}{2\sqrt{n}})x < 0.$$

Il est donc impossible que $M \in V_{[0,1]}$, ce dont on déduit $B(A_x, -x/2) \cap V_{[0,1]} = \emptyset$.

De même, si $x > 1$, alors : $\|M - A_x\| = |y-x|.\sqrt{n} < \frac{x-1}{2}$, d'où : $(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}})x + \frac{1}{2\sqrt{n}} < y < (1 + \frac{1}{2\sqrt{n}})x - \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}})x + \frac{1}{2\sqrt{n}} = (1 - \frac{1}{2\sqrt{n}})(x-1) + 1 > 1$, on a donc une nouvelle fois : $B(A_x, (x-1)/2) \cap V_{[0,1]} = \emptyset$.

Il en résulte que $V_{[0,1]}$ est bien un fermé.

Par ailleurs, $\|A_x\| = \sqrt{nx^2 + n(n-1)/2}$, donc, si $x \in [0, 1] : \sqrt{n(n-1)/2} \leq \|A_x\| \leq \sqrt{n(n+1)/2}$; $V_{[0,1]}$ est bien borné.

3) Pour $r \in \mathbb{N}$, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ étant donnés, soit P l'application définie pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $P(M) = \alpha_0 I + \alpha_1 M + \dots + \alpha_r M^r$, et e_m telle que $e_m(M) = M^m$. Montrer que P est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que P atteint ses bornes sur $V_{[0,1]}$. (On montrera d'abord la continuité de e_m , où l'on établira préalablement que si on choisit un $\eta \leq \|M_0\|$, alors : $\|M - M_0\| < \eta \Rightarrow \|M\| < 2\|M_0\|$).

- *Corrigé* : On doit montrer qu'elle est continue en tout $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|M - M_0\| < \eta \Rightarrow \|M^m - M_0^m\| < \varepsilon. \text{ (La continuité est triviale pour } k=0 \text{ ou } 1 ; \text{ on suppose } k \geq 2 \text{).}$$

On sait que : $\|M - M_0\| < \eta \Rightarrow \|M\| - \|M_0\| < \eta \Rightarrow \|M\| < \|M_0\| + \eta$; donc, si on choisit $\eta \leq \|M_0\|$, alors : $\|M\| < 2\|M_0\|$. Attention, ceci pose l'hypothèse $\|M_0\| > 0$; il faudra refaire une démonstration pour $M_0 = \Theta$.

Par suite : $\|M^m - M_0^m\| = \|M - M_0\|.\|M^{m-1} + M^{m-2}M_0 + \dots + MM_0^{m-2} + M_0^{m-1}\| <$

$\eta.(\|M^{m-1}\| + \|M^{m-2}\|.\|M_0\| + \dots + \|M\|.\|M_0^{m-2}\| + \|M_0^{m-1}\|) < \eta.\|M_0^{m-1}\|. (2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 2 + 1) = \eta.\|M_0^{m-1}\|. (2^m - 1).$

Il en résulte que la proposition est valide pour $\eta = \frac{\varepsilon}{\|M_0^{m-1}\| \cdot (2^m - 1)}$.

Si $M_0 = \Theta$, alors : $\|M\| < \eta \Rightarrow \|M^m\| = \|M\|^m < \varepsilon$ pour $\eta = \varepsilon^{1/m}$.

Par suite, toute combinaison linéaire finie de fonctions continues est continue, donc P est continue. Alors, comme $V_{[0,1]}$ est un fermé borné, P y atteint ses bornes.

4) *Application* : Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, soit $Q(M) = \frac{2}{3}M - M^2$; donner un réel λ tel que $\|Q(A_x)\|$ soit minimal.

$$- \text{Corrigé : } Q(A_x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - x^2 & \frac{2}{3} - 2x & \frac{2}{3} - 2x & \frac{2}{3} - 2x \\ 0 & \frac{2}{3}x - x^2 & \frac{2}{3} - 2x & \frac{2}{3} - 2x \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}x - x^2 & \frac{2}{3} - 2x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}x - x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\|Q(A_x)\| = \sqrt{4 \cdot (\frac{2}{3}x - x^2)^2 + 3 \cdot (\frac{2}{3} - 2x)^2 + 2 \cdot (-\frac{1}{3} - 2x)^2 + (-\frac{4}{3} - 2x)^2} = \sqrt{4x^4 - \frac{16}{3}x^3 + \frac{232}{9}x^2 + \frac{10}{3}}$$

C'est une fonction numérique réelle continue, les éventuels extremums sont atteints lorsque la dérivée s'annule, à savoir : $16x^3 - 16x^2 + \frac{464}{9}x = 0$, dont l'unique racine est 0. En étudiant le signe on en déduit que c'est un minimum : $\|Q(A_x)\|$ atteint son minimum pour $x = 0$, avec $\|Q(A_0)\| = \sqrt{10/3}$, et n'est pas majorée.

IV) 1) On note $P'(M) = \alpha_1 I + 2\alpha_2 M \dots + r \cdot \alpha_r M^{r-1}$; montrer que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P(A_{x+h}) - P(A_x)) = P'(A_x)$. (Pour $k \geq 2$, on montrera d'abord la formule pour e_m , en traitant à part le cas $m = 0$, en calculant ensuite d_k , et en distinguant si $k - 1 \leq m$ ou non. On rappelle au passage qu'on a démontré au DS2 que d_k est linéaire).

- *Corrigé* : On étudie d'abord le cas $k = 1$; $d_1(\frac{1}{h}(P(A_{x+h}) - P(A_x))) = \frac{1}{h}(P(x+h) - P(x)) \cdot d_1(I)$, donc :

$$d_1(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(P(A_{x+h}) - P(A_x))) = d_1(P'(A_x)).$$

Pour $k \geq 2$, on commence à faire la démonstration pour e_m , en traitant d'abord le cas $m = 0$:

$$\frac{1}{h} (e_0(A_{x+h}) - e_0(A_x)) = \frac{1}{h} (I - I) = \Theta, \text{ et : } e'_0(A_x) = \Theta \text{ aussi ; il y a bien égalité.}$$

$$\text{On suppose ensuite } m \geq 1 : d_k(\frac{1}{h}(e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x))) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot \frac{1}{h} ((x+h)^{m-q} - x^{m-q}) \cdot d_k(A_0).$$

Donc, comme les applications linéaires sont continues en dimension finie, ce qui est le cas de d_k :

$$d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x))) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((x+h)^{m-q} - x^{m-q}) \cdot d_k(A_0) =$$

$$\sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot (m-q)x^{m-q-1} \cdot d_k(A_0) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot (m-q)x^{m-q-1} \cdot d_k(A_0) =$$

$$\text{Si } \min(m, k-1) = k-1 \text{ alors } d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x))) = \sum_{q=1}^{\min(m-1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot (m-q)x^{m-q-1} \cdot d_k(A_0),$$

$$\text{et si } \min(m, k-1) = m \text{ alors } d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x))) =$$

$$\sum_{q=1}^{\min(m-1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot (m-q)x^{m-q-1} \cdot d_k(A_0) + \sum_{q=m}^m \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot (m-q)x^{m-q-1} \cdot d_k(A_0) =$$

$$d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x))) = \sum_{q=1}^{\min(m-1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot (m-q)x^{m-q-1} \cdot d_k(A_0).$$

$$\text{Dans les deux cas : } d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x))) = \sum_{q=1}^{\min(m-1, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot (m-q)x^{m-q-1} \cdot d_k(A_0).$$

$$\text{Par ailleurs : } d_k(e'_m(A_x)) = \sum_{q=1}^{\min(m-1, k-1)} \binom{m-1}{q} \binom{k-2}{q-1} \cdot mx^{m-q-1} \cdot d_k(A_0).$$

$$\text{Et comme : } m \cdot \binom{m-1}{q} = (m-q) \cdot \binom{m}{q} \text{ (cf. I.3), alors : } d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x))) = d_k(e'_m(A_x)).$$

Finalement, les deux matrices coïncident sur toutes leurs diagonales : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x)) = d_k(e'_m(A_x))$.

Conclusion : d_k étant linéaire, et étant donnée les propriétés des limites d'une combinaison linéaire, ce qui s'applique à $e_m(M) = M^m$ s'applique à tout polynôme $P(M) = \alpha_0 I + \alpha_1 M + \dots + \alpha_r M^r$:

$$\begin{aligned} d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P(A_{x+h}) - P(A_x))) &= d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sum_{m=0}^r \alpha_m A_{x+h}^m - \sum_{m=1}^r \alpha_m A_x^m)) = d_k(\sum_{m=0}^r \alpha_m \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (A_{x+h}^m - A_x^m)) = \\ \sum_{m=0}^r \alpha_m d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (A_{x+h}^m - A_x^m)) &= \sum_{m=0}^r \alpha_m d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e_m(A_{x+h}) - e_m(A_x))) = \sum_{m=0}^r \alpha_m d_k(e'_m(A_x)) = d_k(\sum_{m=0}^r \alpha_m e'_m(A_x)) = \\ d_k(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P(A_{x+h}) - P(A_x))) &= d_k(P'(A_x)) \text{ car le terme correspondant à } m=0 \text{ est nul.} \end{aligned}$$

Comme toutes les colonnes se correspondent, alors : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P(A_{x+h}) - P(A_x)) = P'(A_x)$.

2) Avec l'exemple du IV.4, calculer $Q'(A_\lambda)$ pour la valeur de λ obtenue au IV.4).

- *Corrigé* : $Q'(A_0) = \frac{2}{3}I - 2A_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (ce n'est donc pas nul).

3) On conserve les notations usuelles des dérivées : $P^{(0)}(M) = P(M)$, et : $P^{(m+1)}(M) = (P^{(m)}(M))'$, et on associe les mêmes notations aux polynômes numériques et aux polynômes de matrices, à savoir :

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_r x^r, \text{ et : } e_m(x) = x^m.$$

Montrer que, pour $k \geq 2$: $d_k(A_x^m) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{k-2}{q-1} \frac{e^{(q)}(x)}{q!} d_k(A_0)$.

- *Corrigé* : D'après II.3.g), on a : $d_k(A_x^m) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{m}{q} \binom{k-2}{q-1} x^{m-q} d_k(A_0)$. Mais comme $\binom{m}{q} x^{m-q} = \frac{e^{(q)}(x)}{q!}$, l'égalité souhaitée est triviale.

4) Montrer que, pour $k \geq 2$: $d_k(P(A_x)) = \sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} \binom{k-2}{q-1} \frac{P^{(q)}(x)}{q!} d_k(A_0)$.

- *Corrigé* : $d_k(P(A_x)) = d_k(\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_r A_x^r) = \alpha_0 d_k(I) + \alpha_1 d_k(A) + \dots + \alpha_r d_k(A_x^r)$, et comme pour $k \geq 2$: $d_k(I)$ est nulle, alors :

$$\begin{aligned} d_k(P(A_x)) &= \alpha_1 d_k(A) + \dots + \alpha_r d_k(A_x^r) = \sum_{m=1}^r \alpha_m d_k(A_x^m) = \sum_{m=1}^r \alpha_m \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{k-2}{q-1} \frac{e^{(q)}(x)}{q!} d_k(A_0) = \\ d_k(P(A_x)) &= \left(\sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \alpha_m \binom{k-2}{q-1} \frac{e^{(q)}(x)}{q!} \right) d_k(A_0). \end{aligned}$$

On peut appliquer le résultat de I.2.a) :

$$d_k(P(A_x)) = \left(\sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} \sum_{m=q}^r \alpha_m \binom{k-2}{q-1} \frac{e^{(q)}(x)}{q!} \right) d_k(A_0) = \sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} \left(\sum_{m=q}^r \alpha_m e^{(q)}(x) \right) \binom{k-2}{q-1} \frac{1}{q!} d_k(A_0).$$

Et comme : $\sum_{m=q}^r \alpha_m e^{(q)}(x) = P^{(q)}(x)$, alors : $d_k(P(A_x)) = \sum_{q=1}^{\min(r, k-1)} \binom{k-2}{q-1} \frac{P^{(q)}(x)}{q!} d_k(A_0)$.

5) a) Montrer que, pour $k \geq 2$: $d_k(P(A_{x+h})) = \sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} d_k(A_h^m)$.

b) Montrer que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

c) En déduire que : $P(A_{x+h}) = \sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} A_h^m$.

- *Corrigé* : a) Pour $k \geq 2$: $d_k(P(A_{x+h})) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{k-2}{q-1} \frac{P^{(q)}(x+h)}{q!} d_k(A_0)$.

On utilise la formule de Taylor pour les polynômes (sans reste si l'ordre du développement est égal au degré du polynôme) :

$$P^{(q)}(x+h) = \sum_{m=q}^r \frac{h^{m-q}}{(m-q)!} P^{(m)}(x).$$

Alors :

$$d_k(P(A_{x+h})) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{k-2}{q-1} \frac{1}{q!} \left(\sum_{m=q}^r \frac{h^{m-q}}{(m-q)!} P^{(m)}(x) \right) \cdot d_k(A_0) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \sum_{m=q}^r \binom{k-2}{q-1} \frac{1}{q!} \frac{h^{m-q}}{(m-q)!} P^{(m)}(x) \cdot d_k(A_0) =$$

$$d_k(P(A_{x+h})) = \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \sum_{m=q}^r \binom{k-2}{q-1} \binom{m}{q} h^{m-q} \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot d_k(A_0).$$

On applique I.2.a) :

$$d_k(P(A_{x+h})) = \sum_{m=1}^r \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{k-2}{q-1} \binom{m}{q} h^{m-q} \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot d_k(A_0) = \sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot \sum_{q=1}^{\min(m, k-1)} \binom{k-2}{q-1} \binom{m}{q} h^{m-q} \cdot d_k(A_0) =$$

$$d_k(P(A_{x+h})) = \sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot d_k(A_h^m).$$

b) Pour $k = 1$: $d_1(P(A_{x+h})) = P(x+h) \cdot d_1(I)$, et : $\sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot d_1(A_h^m) = \sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot h^m \cdot d_1(I)$.

Et d'après la formule de Taylor : $\sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot h^m = P(x+h)$; il y a donc bien égalité.

c) Ayant toutes leurs diagonales égales : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d_k(P(A_{x+h})) = d_k\left(\sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot A_h^m\right)$. Donc :

$$P(A_{x+h}) = \sum_{m=1}^r \frac{P^{(m)}(x)}{m!} \cdot A_h^m.$$

- *Remarque* : Cette formule reste vraie si A_0 est une matrice triangulaire stricte quelconque (avec $A_x = x \cdot I + A_0$).