TSI2 / DM3-2009-2010.

Un exemple de formule de Taylor pour les polynômes d'une matrice triangulaire particulière.

I) Propriétés utiles pour les parties suivantes.

1) *Une propriété des coefficients binomiaux* :

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Il faut prouver que chaque terme d'une ligne donnée est égal à la somme des coefficients de la colonne qui se situe au-dessus et à sa gauche :

Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels (n, q), où $2 \leq q \leq n$: $\binom{n}{q} = \sum_{p=q-1}^{n-1} \binom{p}{q-1}$.

2) *Commutation de sigmas*.

a) Étant donné les entiers naturels $r \geq 2$ et $k \geq 2$, et la suite $(x_{q,m})_{(q,m)\in\mathbb{N}^2}$, montrer que :

$$\sum_{q=1}^{\min(r,k-1)} \sum_{m=q}^{r} x_{q,m} = \sum_{m=1}^{r} \sum_{q=1}^{\min(m,k-1)} x_{q,m}.$$

b) Étant donné les entiers naturels $m \geq 2$ et $k \geq 2$, et la suite $(x_q)_{q\in\mathbb{N}}$, montrer que :

$$\sum_{q=1}^{\min(m,k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1}.x_q = \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{q=1}^{\min(m,k-p)} \binom{k-p-1}{q-1}.x_q.$$

3) Montrer que : $m.\binom{m-1}{q} = (m-q).\binom{m}{q}$.

II) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, et la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$.

Pour tout entier relatif $k \in [\![1-n, n]\!]$, d_k désigne la k-ième diagonale d'une matrice donnée, où l'on numérote 1 la diagonale principale.

Ici : $d_k(A_x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ($n+k$ lignes) pour $k \in [\![1-n, 0]\!]$, $d_1(A_x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$ (n lignes), et $d_k(A_x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ($n-k+1$ lignes) pour $k \in [\![2, n]\!]$.

On admet la formule démontrée au DS2 :

Pour $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$, et $\phi_{p,q}(M, N) = (a_{k,p+k-1}b_{p+k-1,p+q+k-2})_{1 \le k \le n-p-q+2}$, alors :

$$d_k(MN) = \sum_{p=1}^{k} \phi_{p,k+1-p}(M, N).$$

En remarquant que $\phi_{p,q}(M, N)$ peut être présenté comme le produit scalaire du début de $d_p(M)$ avec la fin de $d_q(N)$:

$$\phi_{p,q}(M, N) = \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p+1} \\ \vdots \\ a_{n-p-q+1,n-q} \\ a_{n-p-q+2,n-q+1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{p,p+q-1} \\ b_{p+1,p+q} \\ \vdots \\ b_{n-q,n-1} \\ b_{n-q+1,n} \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A_x^2 et A_x^3.

2) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $d_1(A_x^m) = x^m.d_1(I)$, et : $d_2(A_x^m) = m.x^{m-1}.d_2(A_0)$.

3) On suppose que, pour $k \ge 2$: $d_k(A_x^m) = \sum_{q=1}^{\min(m,\, k-1)} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q-1}.x^{m-q}.d_k(A_0)$ (*hypothèse* (*H*)).

Pour $k \ge 2$, cette formule implique que les polynômes formant les composantes de $d_k(A_x^m)$ sont tous de degré $m - 1$ (obtenu pour $q = 1$) ; la borne supérieure du sigma, $\min(m, k - 1)$, signifie qu'ils comportent $k - 1$ monômes tant qu'on n'a pas atteint la limite maximale de m termes, car il ne peut pas y en avoir plus dans un polynôme de degré $m - 1$ (le degré de x, $m - q$, ne peut pas devenir négatif).

a) Pour $n = 6$, mettre en évidence dans A_x^2 et A_x^3 les diagonales pour lesquelles $\min(m, k - 1)$ vaut m ou $k - 1$.

b) Montrer en écrivant directement la formule de $d_k(A_x^{m+1})$, et en utilisant l'hypothèse (*H*), que l'on obtient l'égalité (E_1) :

$$(E_1) : d_k(A_x^{m+1}) = \Big(\sum_{q=1}^{\min(m+1,\, k-1)} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q-1}.x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m+1,\, k-1)-1} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q}.x^{m-q} + x^m\Big).d_k(A_0).$$

(Utiliser la formule de récurrence usuelle des coefficients binomiaux).

c) Montrer que si $m + 1 \le k - 1$, alors le terme correspondant à $q = m + 1$ dans $\sum_{q=1}^{\min(m+1,\, k-1)} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q-1}.x^{m+1-q}$ est nul. En déduire que l'égalité (E_1) vaut en fait :

$$(E_1) : d_k(A_x^{m+1}) = \Big(\sum_{q=1}^{\min(m,\, k-1)} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q-1}.x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m+1,\, k-1)-1} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q}.x^{m-q} + x^m\Big).d_k(A_0).$$

d) Montrer, en utilisant l'expression de $d_k(MN)$ comme somme des $\phi_{p,k+1-p}(M, N)$, ainsi que l'hypothèse (*H*), qu'on obtient l'égalité (E_2) :

$$(E_2) : d_k(A_x^{m+1}) = d_k(A_x.A_x^m) = \Big(\sum_{q=1}^{\min(m,\, k-1)} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q-1}.x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m,\, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1}\binom{m}{q}.x^{m-q} + x^m\Big).d_k(A_0).$$

e) En déduire que :

$$(E_2) : d_k(A_x^{m+1}) = d_k(A_x.A_x^m) = \Big(\sum_{q=1}^{\min(m,\, k-1)} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q-1}.x^{m+1-q} + \sum_{q=1}^{\min(m,\, k-2)} \sum_{p=q-1}^{k-3} \binom{p}{q-1}\binom{m}{q}.x^{m-q} + x^m\Big).d_k(A_0).$$

f) En déduire que : (E_1) = (E_2).

g) Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que, pour $k \ge 2$: $d_k(A_x^m) = \sum_{q=1}^{\min(m,\, k-1)} \binom{m}{q}\binom{k-2}{q-1}.x^{m-q}.d_k(A_0)$.

III) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M|N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$, qui lui confère une structure euclidienne analogue à celle de $\mathbb{R}^{n^2}$.

1) La matrice U étant donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la translation t_U : $t_U(M) = M + U$. Montrer qu'elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Préciser pourquoi $\mathrm{Vect}(I)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit, J étant une partie de $\mathbb{R}$: $V_J = \{A_x,\ x \in J\}$. Montrer que $V_{\mathbb{R}}$ est un fermé non borné, et que $V_{[0,\,1]}$ est un fermé borné.

3) Pour $r \in \mathbb{N}$, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ étant donnés, soit P l'application définie pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $P(M) = \alpha_0 I + \alpha_1 M + \ldots + \alpha_r M^r$, et e_m telle que $e_m(M) = M^m$. Montrer que P est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que P atteint ses bornes sur $V_{[0,\,1]}$. (On montrera d'abord la continuité de e_m, où l'on établira préalablement que si on choisit un $\eta \leq \|M_0\|$, alors : $\|M - M_0\| < \eta \Rightarrow \|M\| < 2.\|M_0\|$).

4) *Application* : Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, soit $Q(M) = \frac{2}{3}.M - M^2$; donner un réel λ tel que $\|Q(A_\lambda)\|$ soit minimal.

IV) 1) On note $P'(M) = \alpha_1 I + 2\alpha_2 M \ \ldots + r.\alpha_r M^{r-1}$; montrer que : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}.(P(A_{x+h}) - P(A_x)) = P'(A_x)$. (Pour $k \geq 2$, on montrera d'abord la formule pour e_m, en traitant à part le cas $m = 0$, en calculant ensuite d_k, et en distinguant si $k - 1 \leq m$ ou non. On rappelle au passage qu'on a démontré au DS2 que d_k est linéaire).

2) Avec l'exemple du IV.4, calculer $Q'(A_\lambda)$ pour la valeur de λ obtenue au IV.4).

3) On conserve les notations usuelles des dérivées : $P^{(0)}(M) = P(M)$, et : $P^{(m+1)}(M) = (P^{(m)}(M))'$, et on associe les mêmes notations aux polynômes numériques et aux polynômes de matrices, à savoir :

$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r$, et : $e_m(x) = x^m$.

Montrer que, pour $k \geq 2$: $d_k(A_x^m) = \sum\limits_{q=1}^{\min(m,\,k-1)} \binom{k-2}{q-1}.\frac{e^{(q)}(x)}{q!}.d_k(A_0)$.

4) Montrer que, pour $k \geq 2$: $d_k(P(A_x)) = \sum\limits_{q=1}^{\min(r,\,k-1)} \binom{k-2}{q-1}.\frac{P^{(q)}(x)}{q!}.d_k(A_0)$.

5) *a*) Montrer que, pour $k \geq 2$: $d_k(P(A_{x+h})) = \sum\limits_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(x)}{m!}.d_k(A_h^m)$.

b) Montrer que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

c) En déduire que : $P(A_{x+h}) = \sum\limits_{m=1}^{r} \frac{P^{(m)}(x)}{m!}.A_h^m$.