

TSI2 / DM4-2008-2009.

Centrale-Supélec 2003 Maths I (m03ct1e).

D α étant un réel donné, on désigne par f_α la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $f_\alpha(x) = \frac{x}{1 + x^\alpha \cdot \sin^2(x)}$.

Et, dans le cas où l'intégrale est convergente, on pose : $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$.

I.A.1) On suppose $\alpha < 0$. Déterminer la limite de la fonction f_α quand x tend vers $+\infty$. L'intégrale de la fonction f_α est-elle convergente sur \mathbb{R}^+ ?

I.A.2) Reprendre la question précédente dans le cas où $\alpha = 0$.

I.A.3) Montrer que : $f_\alpha(x) \geq x/(1 + x^\alpha)$. L'intégrale de la fonction f_α est-elle convergente sur \mathbb{R}^+ quand α vérifie : $0 < \alpha \leq 2$?

I.B On suppose $\alpha > 0$. On pose :

$$u_n = \int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} f_\alpha(x) dx, \quad v_n = (n-1/2)\pi \int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{dx}{1 + ((n+1/2)\pi)^\alpha \cdot \sin^2(x)}, \quad w_n = (n+1/2)\pi \int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{dx}{1 + ((n-1/2)\pi)^\alpha \cdot \sin^2(x)}.$$

I.B.1) Montrer que l'intégrale de la fonction f_α est convergente sur \mathbb{R}^+ si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente.

I.B.2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq u_n \leq w_n$.

I.B.3) Montrer que : $w_n = (2n+1)\pi \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + ((n-1/2)\pi)^\alpha \cdot \sin^2(u)}$, et : $v_n = (2n-1)\pi \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + ((n+1/2)\pi)^\alpha \cdot \sin^2(u)}$.

I.B.4) h étant un réel strictement positif, calculer : $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + h^2 \cdot \sin^2(x)}$, et en déduire v_n et w_n .

I.B.5) Montrer qu'il existe une constante K strictement positive telle que, pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n \geq K\pi^{2-\alpha/2} \cdot (n+1)^{1-\alpha/2},$$

et une constante K' strictement positive telle que, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 :

$$w_n \leq K'\pi^{2-\alpha/2} \cdot (n-1)^{1-\alpha/2}.$$

I.B.6) En déduire que l'intégrale de la fonction f_α est convergente sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $\alpha > 4$.

I.C) On pose : $\phi(\alpha) = \int_{\pi/2}^{+\infty} f_\alpha(x) dx$, pour tout α réel strictement supérieur à 4.

I.C.1) Montrer que ϕ est décroissante sur $]4, +\infty[$.

I.C.2) En utilisant la minoration de v_n établie à la question I.B.5, montrer que $\phi(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers 4.

I.C.3) En utilisant la majoration de w_n établie à la question I.B.5, montrer que $\phi(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$.

II) On considère la série de fonctions : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, avec $u_n(x) = \frac{n^x}{n!}$. On pose : $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$.

II.A) Pour quelles valeurs de x la série est-elle convergente ? On pose alors $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

II.B) Montrer que S est à valeurs strictement positives, et que la fonction S est strictement croissante.

II.C) Calculer : $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$.

II.D) Montrer que pour tout réel x strictement négatif et pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 :

$$0 < S(x) \leq S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On remarquera que, lorsque k est strictement supérieur à n , on a : $(k/n)^x < 1$ et $(n!/k!) \leq (n+1)^{n-k}$.

II.E) En déduire une valeur approchée de $S(-1)$ à 10^{-2} près.

II.F) Étudier les limites de S quand x tend vers $+\infty$, et quand x tend vers $-\infty$.

II.G) Donner l'allure de la représentation graphique de S , en précisant la nature des branches infinies.

II.H) Démontrer que : $\forall x \in [0, 1], \forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^p \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + e \cdot \frac{x^p}{p!}$.

II.I) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{(e^t - 1)dt}{t}$ est convergente.

II.J) Démontrer que : $\int_0^1 \frac{(e^t - 1)dt}{t} = S(-1)$.