TSI2 / DM4-2009-2010.

CCP 2004 TSI - Mathématiques I (m04pt1e).

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Objet : La transformation de Fourier est un outil employé en sciences de l'ingénieur. En plus d'être linéaire, elle vérifie de nombreuses propriétés. Nous nous proposons d'en établir quelques-unes en nous limitant à un espace vectoriel particulier.

I) Préliminaires.

On note $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions définies, continues et infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

On note $\mathscr{P}$ le sous-espace vectoriel de E des fonctions f de la forme $f(t) = P(t).e^{-\pi t^2}$ où P est un polynôme à coefficients complexes.

Pour tout n entier naturel, on note $\mathscr{P}_n$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$ des fonctions f de la forme $f(t) = P(t).e^{-\pi t^2}$ où P est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

I.1) Quelques endomorphismes qui nous seront utiles.

Soit T, D, S trois applications qui, à une fonction f de E associent respectivement les fonctions suivantes :

$T(f) = g$ avec pour tout t réel $g(t) = t.f(t)$.

$D(f) = f'$.

$S(f) = h$ avec pour tout t réel $h(t) = f(-t)$.

Montrer que les applications T, D, S définissent chacun un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que S est un automorphisme. Donner S^{-1}.

I.2) Étude des intégrales utilisées.

a) Justifier l'existence de $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. De nombreuses méthodes permettent d'obtenir $J = \sqrt{\pi}$; on l'admettra.

En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$.

b) Pour toute fonction f de $\mathscr{P}$, justifier la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

c) Pour tout réel u, pour toute fonction f de $\mathscr{P}$, justifier la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi ut} dt$.

I.3) Définition de la transformation de Fourier (notée ϕ ici).

Soit ϕ l'application qui à tout f de $\mathscr{P}$ associe si elle existe la fonction $\phi(f) = \psi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

pour tout u réel $\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi ut} dt$.

Vérifier que ϕ est bien définie sur $\mathscr{P}$, puis montrer que ϕ est une application linéaire.

II) Deux formules pour l'application linéaire ϕ.

On conservera par la suite les notations suivantes : f un élément de $\mathscr{P}$, défini par : $f(t) = P(t).e^{-\pi t^2}$ pour tout t réel. Son image par ϕ : $\psi = \phi(f)$ définie par $\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi ut} dt$ pour tout u réel.

II.1) Première formule.

Justifier la dérivabilité de ψ, calculer $\psi'(u)$ et montrer que dans $\mathscr{P}$ on a : $\psi' = -2i\pi.\phi(g)$ avec $g(t) = t.f(t)$.

Que l'on peut écrire de façon plus formelle : $D \circ \phi = -2i\pi(\phi \circ T)$ formule que l'on notera (*1*).

En remarquant que ψ' est l'image d'une fonction de $\mathscr{P}$, en déduire que ψ est infiniment dérivable et est donc un élément de E.

II.2) Deuxième formule.

Par une intégration par parties, montrer que dans $\mathscr{P}$ on a : $\phi(f') = \psi_1$ avec $\psi_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t).e^{-2i\pi ut}dt = 2i\pi u.\psi(u)$.

Que l'on peut écrire de façon plus formelle : $\phi \circ D = 2i\pi(T\circ\phi)$ formule que l'on notera (*2*).

III) <u>ϕ est un endomorphisme</u>.

III.1) Pour tout k entier naturel, on note b_k la fonction qui à tout t réel associe $b_k(t) = t^k.e^{-\pi t^2}$. Pour tout n entier naturel, on considère la famille $(b_k)_{0\le k\le n}$, justifier que celle-ci constitue une base de $\mathscr{P}_n$. On pose $\phi(b_k) = B_k$.

III.2) Donner l'ensemble $\mathbb{SG}$ des solutions de l'équation différentielle (*E*) : $f'(t) + 2\pi t.f(t) = 0$ si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^1.

III.3) Vérifier que b_0 est un élément de $\mathbb{SG}$, noter la relation différentielle qui en découle en utilisant les endomorphismes D et T, en déduire une relation différentielle vérifiée par B_0, puis montrer l'existence d'une constante complexe λ telle que, pour tout u réel, $B_0(u) = \lambda.e^{-\pi u^2}$. Exprimer $B_0(0)$ sous forme d'une intégrale et en déduire la valeur de λ.

III.4) Pour tout k entier naturel non nul, on a la relation $b_k = T(b_{k-1})$. Calculer B_1, B_2, B_3, puis montrer par récurrence que $B_k = \phi(b_k)$ est un élément de $\mathscr{P}_k$. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, si f est un élément de $\mathscr{P}_n$, il en est de même de $\phi(f)$. Montrer alors que ϕ définit un endomorphisme de $\mathscr{P}$.

IV) <u>Étude en dimension 4</u>.

Soit n un entier naturel. On note S_n l'endomorphisme de $\mathscr{P}_n$ tel que $S_n(f) = S(f)$ et ϕ_n l'endomorphisme de $\mathscr{P}_n$ tel que $\phi_n(f) = \phi(f)$.

IV.1) Écrire les matrices de ϕ_3 et S_3 dans la base (b_0, b_1, b_2, b_3) de $\mathscr{P}_3$.

IV.2) Expliciter $\phi_3\circ\phi_3$ en fonction de S_3. En déduire que ϕ_3 est inversible et donner son inverse.

V) <u>ϕ est bijectif. Quel est son inverse</u> ?

Pour tout endomorphisme A, on note $A^2 = A\circ A$, et pour tout m entier naturel non nul $A^m = A\circ A^{m-1} = A^{m-1}\circ A$ avec la convention $A^0 = I$ qui représente l'application identité sur $\mathscr{P}$. Pour tout j entier naturel, on note $b_0^{(j)}$ la $j^{\text{ième}}$ dérivée de b_0, on a donc $b_0^{(j)} = D^j(b_0)$ (*on posera* $b_0^{(0)} = b_0$).

V.1) Pour tout j entier naturel non nul, exprimer $\phi(b_0^{(j)})$ en fonction de b_0 et T, puis en fonction de b_j.

V.2) Pour tout k entier naturel non nul, on a la relation $b_k = T(b_{k-1}) = T^k(b_0)$; exprimer $\phi(b_k)$ en fonction de b_0 et D, puis en fonction de $b_0^{(k)}$.

V.3) Exprimer alors $\phi^2(b_k)$. En déduire que ϕ est bijectif, justifier les deux formules suivantes : $\phi\circ\phi = S$ et $\phi^{-1} = S\circ\phi = \phi\circ S$. Cette dernière relation nous permettra par la suite de permuter S et ϕ.

V.4) Montrer que $\phi^{-1} = \phi^3$.

VI) <u>Valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_3</u>.

VI.1) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_3 ; cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

VI.2) Déterminer une base de $\mathscr{P}_3$ formée de vecteurs propres de ϕ_3.

VI.3) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout t réel par : $f(t) = P(t).e^{-\pi t^2}$, avec $P(t) = 1 + t^2 + t^3$. Décomposer f dans la base trouvée à la question précédente.