

## Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II, série TSI, concours CCP 2007

**Problème 1**

1. Il est clair que  $\varphi$  est bilinéaire et symétrique. Montrons que  $\varphi$  est définie positive.

Soit  $P \in E$ . Tout d'abord  $\varphi(P, P) = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geq 0$ .

Si  $\varphi(P, P) = 0$ , on a alors à la fois  $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$ . Comme  $\deg(P) \leq 2$ , la formule de Taylor permet d'écrire  $P = P(0) + XP'(0) + \frac{X^2}{2}P''(0) = 0$ .

D'où  $\varphi$  est définie positive et :

$\varphi$  est un produit scalaire

$$\begin{aligned} 2. \quad \langle 1, X \rangle &= 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0 \\ \langle 1, X^2 \rangle &= 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 2 = 0 \\ \langle X, X^2 \rangle &= 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$B_c$  est une base orthogonale de  $(E, \langle \rangle)$

Notons  $\| \cdot \|$  la norme associée à  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1 \Rightarrow \|1\| = 1 \\ \langle X, X \rangle &= 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1 \Rightarrow \|X\| = 1 \\ \langle X^2, X^2 \rangle &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 2 = 4 \Rightarrow \|X^2\| = 2 \end{aligned}$$

D'où :

Une base orthogonale de  $E$  est  $(1, X, \frac{X^2}{2})$

$$3. \quad \begin{aligned} \varphi(P, Q) &= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \\ &= aa' + bb' + 4cc' \end{aligned}$$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 4c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + 4cc'.$$

D'où :

$$\varphi(P, Q) = (a \ b \ c) S \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

4. Soit  $\Omega$  la matrice de passage de  $B_c$  à  $B = (1, X, \frac{X^2}{2})$  :  $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Notons  $A'$  la

matrice de  $u$  dans  $B$ ; on a alors  $A' = \Omega^{-1}A\Omega$  et  $A'$  est la matrice de  $u$  dans une base orthonormée. D'où :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad &\Leftrightarrow u \text{ conserve le produit scalaire} \\ &\Leftrightarrow u \text{ est une isométrie vectorielle} \\ &\Leftrightarrow {}^t A' A' = I_3 \\ &\Leftrightarrow {}^t \Omega {}^t A \Omega^{-1} \Omega^{-1} A \Omega = I_3 \\ &\Leftrightarrow {}^t A {}^t \Omega^{-1} \Omega^{-1} A = {}^t \Omega^{-1} \Omega^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Or } {}^t \Omega^{-1} \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = S$$

On a montré :

$$\boxed{\forall (P, Q) \in E^2, \langle u(P), u(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle \Leftrightarrow {}^tASA = S}$$

5. Soit  $A \in G$ . On a alors  $\det({}^tASA) = \det(S) \Rightarrow 4\det(A)^2 = 4$ . D'où :
- $\det(A) = \pm 1 \neq 0$  et  $A \in GL_3(\mathbb{R})$ . Montrons donc que  $G$  est un sous-groupe de  $GL_3(\mathbb{R})$ .
- ${}^tI_3SI_3 = S \Rightarrow I_3 \in G : G \neq \emptyset$ .
  - Soient  $A, B \in G$ .  
 ${}^t(AB)S(AB) = {}^tB({}^tASA)B = {}^tBSB = S$ ; d'où  $AB \in G$  et  $G$  est stable pour la multiplication des matrices.
  - Soit  $A \in G$ ;  ${}^tASA = S \Rightarrow ({}^tA)^{-1}SA^{-1} = S$   
 $\Rightarrow {}^t(A^{-1})SA^{-1} = S$   
 $\Rightarrow A^{-1} \in G$

D'où :

$$\boxed{G \text{ est un sous-groupe de } (GL_3(\mathbb{R}), \times)}$$

6. a) Soit  $P \in E$ ; alors  $\deg(P(1-X)) = \deg(P)$  et  $v(P)$  est bien dans  $E$ .  
 D'autre part,  $\forall P, Q \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  
 $v(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1-X) = \lambda P(1-X) + \mu Q(1-X) = \lambda v(P) + \mu v(Q)$ . D'où :  
 $\boxed{v \text{ est un endomorphisme de } E}$
- b)  $v(1) = 1$   
 $v(X) = 1 - X$   
 $v(X^2) = 1 - 2X + X^2$   
 D'où :

$$\boxed{M_{B_c}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

- c) Notons  $A$  la matrice précédente. On a alors :

$$\begin{aligned} {}^tASA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &\neq S \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{v \text{ n'est pas une isométrie vectorielle pour le produit scalaire } \varphi}$$

- d)  $\forall P \in E, v \circ v(P) = v(P(1-X)) = P(1 - (1-X)) = P$ ; d'où :  
 $\boxed{v \text{ est involutif; c'est un isomorphisme de } E \text{ et } v^{-1} = v.}$

7. a) La dérivation des polynômes étant linéaire et diminuant le degré,  
 $\psi$  et  $\psi$  et  $\psi_1$  sont clairement des endomorphismes de  $E$ .

$$\begin{aligned}
\text{b) } \psi(1) &= 1 \\
\psi(X) &= 1 + X \\
\psi(X^2) &= 2 + 2X + X^2 \\
\psi_1(1) &= 1 \\
\psi_1(X) &= -1 + X \\
\psi_1(X^2) &= -2X + X^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$M_{B_C}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_{B_C}(\psi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)  $\forall P \in E$ ,  $\psi \circ \psi_1(P) = \psi(P - P') = (P - P') + (P' - P'') + P''$  car  $P^{(3)} = 0$ . D'où  $\psi \circ \psi_1(P) = P$  et :

$$\boxed{\psi \circ \psi_1 = Id_E}$$

L'on en déduit que  $\det(\psi) \times \det(\psi_1) = 1$ , que  $\psi$  et  $\psi_1$  appartiennent à  $GL(E)$  et que

$$\boxed{\psi_1^{-1} = \psi}$$

d) Soit  $P$  solution polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 de l'équation. On a alors :

$$\begin{aligned}
\psi_1(P) &= X^2 + 5X + 9 \Leftrightarrow P = \psi(X^2 + 5X + 9) \\
&\Leftrightarrow P = (X^2 + 5X + 9) + (2X + 5) + 2 \\
&\Leftrightarrow P = X^2 + 7X + 16
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une solution particulière de l'équation différentielle est donc } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 + 7x + 16}$$

$$\boxed{\text{La solution générale de l'équation différentielle est donc } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 + 7x + 16 + \lambda e^x}$$

8. a) Notons  $C_1, C_2, C_3$  les colonnes de  $A$ . Pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned}
\langle C_1, C_2 \rangle &= \frac{1}{9}(1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 - 3) = 0 \\
\langle C_1, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(-1 + \sqrt{3} + 3 - 1 - 1 - \sqrt{3}) = 0 \\
\langle C_2, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(3 - 1 - 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1) = 0 \\
\langle C_1, C_1 \rangle &= \frac{1}{9}(1 + 4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}) = 1 \\
\langle C_2, C_2 \rangle &= \frac{1}{9}(4 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - 2\sqrt{3}) = 1 \\
\langle C_3, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} + 1) = 1
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{A \text{ est une matrice orthogonale}}$$

b) Soit  $P = x + yX + zX^2 \in E$ . Résolvons  $r(P) = P$ .

$$\begin{aligned}
r(P) = P &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 + \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 \\ 1 - \sqrt{3} & 1 & -1 - \sqrt{3} \\ -1 - \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + (1 + \sqrt{3})y + (\sqrt{3} - 1)z = 0 \\ (1 - \sqrt{3})x - 2y - (1 + \sqrt{3})z = 0 \\ -(1 + \sqrt{3})x + (\sqrt{3} - 1)y - 2z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc :

$$r(P) = P \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + (1 + \sqrt{3})y + (\sqrt{3} - 1)z = 0 \\ y(-4 - 2) + z(-2 - 2\sqrt{3}) = 0 \quad (L_2 \leftarrow 2L_2 + (1 - \sqrt{3})L_1) \\ y(-2\sqrt{3} + 2 + 4 + 2\sqrt{3}) + z(4 + 2) = 0 \quad (L_3 \leftarrow -2L_3 + (1 + \sqrt{3})L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs invariants est donc  $\Delta = Vect\{1 + X - \frac{X^2}{2}\}$

c) L'ensemble des invariants étant une droite,  $r$  est une rotation vectorielle.  
Son axe est  $\Delta$ , ensemble des invariants.

Orientons  $\Delta$  par  $P_0 = 1 + X - \frac{X^2}{2}$  et notons  $\theta$  l'angle de  $r$ .

$$- \operatorname{tr}(A) = 2 \cos(\theta) + 1 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

- Afin de préciser l'angle, prenons un polynôme non colinéaire à  $P_0$ , 1 par exemple, et calculons le produit mixte  $[1, r(1), P_0]$  qui est du signe de  $\sin(\theta)$ .

$$[1, r(1), P_0] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1 - \sqrt{3}}{3} & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}}{3} > 0$$

$$\text{D'où : } \sin(\theta) > 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$r$  est donc une rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\frac{\pi}{2} [2\pi]$  pour l'orientation choisie.

## Problème 2

1. -  $(C)$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

$$- \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} - \text{on peut restreindre l'étude à } \mathbb{R}^+ \\ - (C) \text{ est symétrique par rapport à } (Ox) \end{array} \right.$$

$(C)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, x' = 2t \text{ et } y' = 3t^2$$

D'où le tableau de variations :

$t$	0	$+\infty$
$x'$	0	+
$x$	0	$\nearrow +\infty$
$y$	0	$\nearrow +\infty$
$y'$	0	+

- Étude du point stationnaire en 0 :

Au voisinage de 0,  $\overrightarrow{OM}(t) = t^2i + t^3j$ . ( $i, j$ ) étant libre,  $M(0)$  est un point de rebroussement de première espèce et la tangente est orientée par  $i$ .

- Étude de la branche infinie en  $+\infty$  :

$\frac{y}{x} = t$  qui tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  : d'où la branche infinie est une branche parabolique de direction asymptotique  $Vect\{j\}$