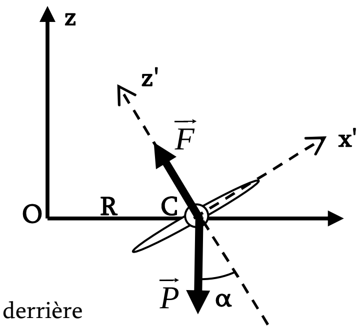
DM6 – 31/03/2010 – Problème 1 : Avion en Virage

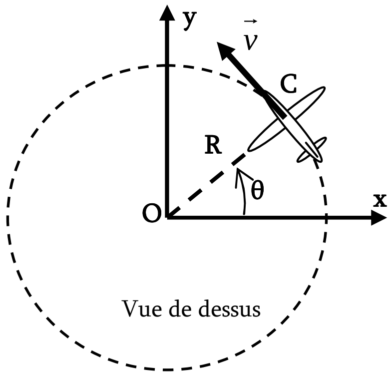
On considère un avion de masse M dont le centre de gravité C décrit un cercle de centre O et de rayon R, dans le plan horizontal (Oxy) fixe dans le référentiel terrestre $\Re_T = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$ supposé galiléen. L'avion a un mouvement uniforme à la vitesse v. On a donc $\dot{\theta} = \omega_0 = constante$. L'angle d'inclinaison de l'avion par rapport à la verticale est noté α, supposé constant. On peut définir plusieurs référentiels pour l'étude du mouvement de l'avion :

$$\begin{cases} \rightarrow \text{Le référentiel terrestre supposé galiléen : } \Re_T = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right) \text{, centré en O.} \\ \rightarrow \text{Un référentiel utilisant la base cylindrique centré en 0 : } \Re_{C1} = \left(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}, t\right) \\ \rightarrow \text{Un référentiel utilisant la base cylindrique centré en C : } \Re_{C2} = \left(C, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}, t\right) \\ \rightarrow \text{Un référentiel } \Re_A = \left(C, \overrightarrow{e_x'}, \overrightarrow{e_y'}, \overrightarrow{e_z'}, t\right) \text{ lié à l'avion, comme défini par le schéma ci-dessous.} \end{cases}$$

Le poids de l'avion est noté $\vec{P}$. La résultante des forces exercées par l'air sur l'avion est notée $\vec{F} = \overrightarrow{F_P} + \overrightarrow{F_T}$, où $\overrightarrow{F_T}$ est la trainée (frottements de l'air opposés à la vitesse $\vec{v}$), et $\overrightarrow{F_P}$ est la portance suivant l'axe (Cz'). De plus, l'action des moteurs équivaut à une force de traction $\vec{T}$ supposée être orientée dans le sens du mouvement, c'est-à-dire suivant le vecteur vitesse $\vec{v}$. Le champ de pesanteur est noté $\vec{g}$.



Vue de derrière



Vue de dessus

1. Préparation des équations

1.1. Définir la base cylindrique $B_{CYL} = \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$ adaptée à l'étude de ce problème (faire des schémas).

1.2. Redémontrer les formules générales de composition des vitesses et des accélérations, lorsque l'on étudie le mouvement d'un point M dans un référentiel relatif $\Re' = \left(O', \overrightarrow{e_x'}, \overrightarrow{e_y'}, \overrightarrow{e_z'}, t\right)$ par rapport à un référentiel absolu $\Re = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$. On redéfinira les vitesses ou accélérations absolues, relatives, d'entraînement, et/ou de Coriolis.

2. Etude dans le référentiel galiléen $\Re_T = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$

2.1. Rappeler ce qu'est un référentiel galiléen d'après les lois de Newton, et rappeler sous quelles conditions un référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen.

2.2. Faire un bilan des forces auxquelles est soumis l'avion C dans ce référentiel (en projetant les vecteurs sur les bases donnant les expressions les plus simples).

2.3. Exprimer la position, la vitesse et l'accélération de C dans le référentiel $\Re_T$, en utilisant les vecteurs de la base cylindrique, en fonction de r et de ω_0 uniquement.

2.4. Appliquer le PFD à l'avion C, et en déduire la relation : $\frac{v^2}{R} = g \tan\alpha$ (projection sur x')

3. Etude dans le référentiel cylindrique centré en O $\Re_{C1} = \left(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$

3.1. Donner l'expression des deux vecteurs caractérisant le mouvement de $\Re_{C1}$ par rapport à $\Re_T$: le vecteur rotation $\overrightarrow{\omega_{\Re_{C1}/\Re_T}}$, et la vitesse $\overrightarrow{v_{(O/\Re_T)}}$.

3.2. Appliquer le PFD à l'avion C dans le référentiel $\Re_{C1}$, et retrouver l'expression $\frac{v^2}{R} = g \tan\alpha$.

4. Etude dans le référentiel cylindrique centré en C $\Re_{C2} = \left(C, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$

4.1. Donner l'expression des deux vecteurs caractérisant le mouvement de $\Re_{C2}$ par rapport à $\Re_T$: le vecteur rotation $\overrightarrow{\omega_{\Re_{C2}/\Re_T}}$, et la vitesse $\overrightarrow{v_{(C/\Re_T)}}$.

4.2. Appliquer le PFD à l'avion C dans le référentiel $\Re_{C2}$, et retrouver l'expression $\frac{v^2}{R} = g \tan\alpha$.

5. Analyse des résultats

5.1. Dans chacun des PFD écrits aux questions 2.4, 3.2 et 4.2, mettre en évidence la force centrifuge exercée sur l'avion : Donner son expression en fonction de m, ω_0 et R, puis en fonction de m, v et R, et dire de quel terme elle provient. Quelle est alors la différence entre les différents référentiels d'étude ?

5.2. Calculer le rayon de courbure d'un virage effectué à vitesse constante v = 200km.h^{-1}, et à inclinaison constante α = 30°. On prendra g = 9,81m.s^{-2}. L'inclinaison maximale tolérée (pour la sécurité) dans un petit avion à hélice est de 60°, et sa vitesse peut varier entre 100km.h^{-1} et 200km.h^{-1}. Que doit faire le pilote si il veut faire demi-tour dans un canyon étroit ? Quel est la largeur minimal d'un canyon dans lequel il pourra réussir cette manœuvre ?

6. Poids apparent

On définit le poids apparent $\overrightarrow{P_{app}}$ subit par le pilote et les passagers comme la somme de l'influence du poids réel $\vec{P}$ et de la force centrifuge obtenue aux questions précédentes. On note m la masse du pilote, assimilé à un point matériel confondu avec le point C.

6.1. Montrer que $\overrightarrow{P_{app}}$ est dirigé suivant l'axe (Cz'). Justifier rapidement ce choix de définition de $\overrightarrow{P_{app}}$ (penser à la verticale apparente perçu par le pilote). Quel est l'intérêt de pencher le véhicule lors d'un virage (exemple de l'avion, du TGV ou de la moto) ?

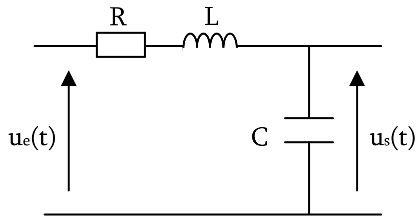
6.2. Démontrer la relation $P_{app} = \frac{mg}{\cos\alpha}$

6.3. Quelle est la variation relative de l'intensité du poids du pilote par rapport au sol ? AN : calculer cette variation relative pour α = 15°, α = 30°, α = 45° et α = 60°.

6.4. De manière courante, on mesure une accélération en "g", comparant l'accélération au champ de pesanteur terrestre. Ainsi, un homme debout sur Terre, subit une accélération verticale de 1g. Des turbulences modérées appliquent des accélérations aléatoires à l'avion de l'ordre de 0,2g. Comparer cette valeur numérique aux poids apparents calculés au 6.3, et justifier pourquoi les turbulences sont plus gênantes pour les passagers que les virages.

DM6 – 31/03/2010 – Problème 2 : Etude de résonances électriques

Partie 1 : Résonance d'un circuit RLC série



Un circuit RLC série est alimenté par une tension d'entrée sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$. On note $u_s(t) = U_{sm}\cos(\omega t+\varphi)$ la tension aux bornes du condensateur de capacité C (figure ci-contre).

1.1. Quelle est (sans calculs) la nature du filtre ?

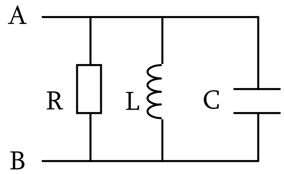
1.2. On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Que représentent ω_0 et Q ?

1.3. Ecrire la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{U}_{sm}}{\underline{U}_{em}}$ de ce filtre en fonction de Q et de x.

1.4. Montrer que le gain $G = |\underline{H}|$ passe par un maximum (on pourra chercher un minimum du dénominateur) à condition que $Q > Q_{lim}$ et préciser la valeur de Q_{lim}. Quel est alors la valeur de G_{max} en fonction de Q ?

1.5. Tracer le diagramme de Bode de ce filtre pour $Q_1 = 5$ et $Q_2 = 0{,}5$. (G_{dB} et φ en fonction de log(x), éventuellement à l'aide d'un logiciel, Excel ou Maple…)

Partie 2 : Résonance d'un dipôle RLC parallèle



On considère, entre deux points A et B, un circuit comportant en parallèle : une résistance R, une inductance pure L, et un condensateur C.

2.1 Expression de l'impédance

2.1.a) Ecrire l'admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle AB en fonction de R, L, C et ω.

2.1.b) On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$. Exprimer le produit $R \times \underline{Y}$ sous la forme 1 + j * f(x,Q), où f(x,Q) désigne une fonction simple de x et de Q.

2.1.c) En déduire l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle AB.

2.2. Représentation de cette impédance

2.2.a) Préciser le comportement du dipôle aux basses fréquences et aux hautes fréquences, on donnera une interprétation physique du dipôle équivalent obtenu.

2.2.b) Etudier brièvement le comportement du module Z de $\underline{Z}$ en fonction de x, et tracer l'allure de sa courbe représentative.